О разрешимости проблемы разложимости для конечных теорий*

А.С. Морозов Д.К. Пономарев

Аннотация

В работе рассматривается проблема разложимости элементарных теорий — алгоритмическая проблема нетривиального представления теории в виде объединения двух (или более) теорий дизъюнктных сигнатур. Доказана Σ_1^0–полнота и, как следствие, алгоритмическая неразрешимость проблемы разложимости конечных хорновых универсальных теорий а также разрешимость проблемы разложимости для конечных теорий в сигнатуре, содержащей только одноместные предикаты и символы констант.

Интерес к изучению разбиений теорий обусловлен практическими задачами и связан с развитием компонентных методов в автоматическом доказательстве теорем [1] и сопровождении терминологических систем [2, 3, 4, 5]. Исследование свойства разложимости элементарных теорий было начато в [6], где установлена однозначность разложения элементарной теории на неразложимые компоненты и сформулирован критерий разложимости. В дальнейшем эти результаты были расширены на более общее свойство Δ — разложимости теорий в широком классе логических исчислений [7].

Естественным вопросом для изучения является эффективность распознавания свойства разложимости. Для ряда конечных сигнатур проблема разложимости конечно аксиоматизируемых элементарных теорий оказывается Σ_1^0–полной и, следовательно, алгоритмически неразрешимой; в частности, это верно уже для конечных универсальных хорновских теорий. Однако в случае, когда сигнатура теории состоит из одноместных предикатных и константных символов, проблема разложимости оказывается алгоритмически разрешимой. Доказательству этих результатов посвящена данная статья. Все основные определения, используемые в статье, достаточно стандартны, и их можно найти, например, в [8, 9, 10].

Введем сначала некоторые обозначения. Через ω будем, как обычно, обозначать множество всех натуральных чисел, через $\{0,1\}^n$ — множество кортежей длины n, состоящих из нулей и единиц. Если Σ — сигнатура, то язык

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-04003-ННИО_а (DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0-1).

первого порядка этой сигнатуры мы будем обозначать через L_Σ. Пусть $\mathcal{T}$ — множество формул первого порядка. Через $\mathtt{sig}(\mathcal{T})$ будем обозначать множество всех сигнатурных символов, входящих в формулы из $\mathcal{T}$. Если Σ — некоторая сигнатура, то под теорией сигнатуры Σ мы понимаем любое множество предложений этой сигнатуры.

Напомним определение разложимой теории.

Определение 1 ([6]) *Пусть $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_1$ — такие теории, что*

1. $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_0) \neq \varnothing \neq \mathtt{sig}(\mathcal{S}_1)$*;*
2. $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_0) \cap \mathtt{sig}(\mathcal{S}_1) = \varnothing$*,* $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_0) \cup \mathtt{sig}(\mathcal{S}_1) = \mathtt{sig}(\mathcal{T})$*;*
3. *Теория $\mathcal{T}$ эквивалентна теории $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.*

Тогда будем говорить, что $\mathcal{T}$ разложима на теории $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_1$. Пару $\langle \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \rangle$ назовем разложением теории $\mathcal{T}$. Этот факт будет записываться, как $T = \mathcal{S}_0 \uplus \mathcal{S}_1$. При этом теории $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_1$ будем называть компонентами этого разложения, а сигнатуры $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_0)$ и $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_1)$ будем называть сигнатурными компонентами разложения. Теория называется разложимой, если у нее существует хотя бы одно разложение. Предложение φ называется разложимым, если разложима определяемая им теория.

Отметим один простой теоретико–модельный критерий разложимости теорий:

Предложение 1 *Пусть сигнатура Σ является объединением непустых непересекающихся сигнатур Σ_0 и Σ_1. Обозначим через $\mathcal{T}_i$ множество следствий из теории $\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ_i, $i = 0, 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$\mathcal{T}$ разложима на компоненты сигнатур Σ_0 и Σ_1;*
2. *любая модель сигнатуры Σ, обеднения которой на сигнатуры Σ_0 и Σ_1 являются моделями теорий $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$ соответственно, является также моделью теории $\mathcal{T}$.*

Мы будем рассматривать только *эффективные сигнатуры*, то есть такие сигнатуры, у которых каждому символу естественным образом присвоен его номер — натуральное число, все номера образуют начальный (конечный или бесконечный) отрезок ω, и по номеру символа можно эффективно вычислить число его аргументов. Если Σ — произвольная эффективная сигнатура, то можно определить естественную (так называемую, гёделеву) нумерацию γ всех формул этой сигнатуры таким образом, что по произвольному натуральному числу эффективно определяется формула γ_n с этим номером, и по произвольной формуле φ можно эффективно определить ее некоторый номер n, т.е. такое натуральное число, что $\varphi = \gamma_n$. На основе этой гёделевой нумерации формул можно определить естественную нумерацию всех конечных множеств формул. Для этого сначала определим обычную нумерацию D всех конечных подмножеств ω:

$$D_n = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1}\} \quad \Leftrightarrow \quad n = \sum_{i<k} 2^{a_i}.$$

При этом, конечное множество формул $\{\gamma_{i_0}, \ldots \gamma_{i_s}\}$ получает номер n, если $D_n = \{i_0, \ldots i_s\}$. Конечное множество формул, имеющее номер n, будем обозначать через $\widetilde{D}_n$. При этом, n будем называть *индексом* конечного множества формул $\widetilde{D}_n$.

Область значения частично вычислимой функции f будем обозначать через $\mathtt{range}\,(f)$.

Определение 2 Проблема разложимости для конечных семейств предложений сигнатуры Σ – *есть множество индексов конечных разложимых теорий сигнатуры* Σ.

Таким образом, проблема разложимости для сигнатуры Σ разрешима, если существует алгоритм, позволяющий по любому конечному набору предложений в сигнатуре Σ установить, является ли он разложимым.

Конечные универсальные хорновские теории

Теория, аксиоматизируемая конечным набором квазитождеств, называется *конечной универсальной хорновской теорией.* Известно, что аксиоматизации такого рода соответствуют классу логических программ [11]. Мы опускаем кванторы в записи аксиом таких теорий и будем использовать левосторонний стиль записи импликаций, принятый в логическом программировании.

Теорема 1 *Существует конечная сигнатура Σ такая, что проблема разложимости конечных универсальных хорновских теорий сигнатуры Σ является Σ^0_1–полной.*

Покажем, что существует эффективная процедура, которая по заданному $m \in \omega$ и гёделеву номеру примитивно вычислимой функции f определяет индекс конечной универсальной хорновской теории $\mathcal{S}_m$ такой, что $\mathcal{S}_m$ разложима тогда и только тогда, когда $m \in \mathtt{range}\,(f)$.

Зафиксируем конечную последовательность функций $f_1, \ldots, f_k$, где $f_k \equiv f$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ имеет место один из перечисленных ниже случаев:

1. f_i – есть функция проекции $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, либо функция-константа $0(x) = 0$, либо функция следования $s(x) = x + 1$;

2. f_i – есть суперпозиция некоторых элементов указанной последовательности с номерами, меньшими, чем i;

3. f_i получается примитивной рекурсией из некоторых элементов указанной последовательности, имеющих номера меньше i.

Последовательность $f_1, \ldots, f_k$ можно рассматривать как схему вычисления f. Для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ зафиксируем один из перечисленных случаев для f_i.

Докажем модифицированный результат о представимости частично вычислимых функций логическими программами (Теорема 9.6 в [11]). В частности, в доказательстве будет использоваться дополнительный аргумент $\mathbf{s}(\mathbf{0})$ для того, чтобы построить представляющую теорию неразложимой. Нам потребуется доказательство лишь для примитивно вычислимых функций.

Рассмотрим конечную универсальную хорновскую теорию $\mathcal{T}$, определенную следующим образом: сигнатура $\mathcal{T}$ содержит одноместный функциональный символ $\mathbf{s}$, константу $\mathbf{0}$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ – n+2–местный предикатный символ P_i, где n – число аргументов функции f_i. Для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ теория $\mathcal{T}$ включает аксиому φ_i следующего вида:

Случай 1: *f_i – есть $I^n_m(x_1, \ldots, x_n)$.*
Тогда φ_i – универсальное замыкание формулы $P_i(x_1, \ldots, x_n, x_m, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$.

Случай 2: *f_i – есть $0(x)$.*
В этом случае φ_i – есть универсальное замыкание формулы $P_i(x, \mathbf{0}, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$.

Случай 3: *f_i – есть $s(x)$.*
Тогда φ_i – универсальное замыкание $P_i(x, \mathbf{s}(x), \mathbf{s}(\mathbf{0}))$.

Случай 4: *$f_i(\bar{x}) = f_j(f_{l_1}(\bar{x}), \ldots, f_{l_q}(\bar{x}))$, где $j, l_1, \ldots, l_q < i$.*
В этом случае φ_i – есть универсальное замыкание формулы

$$P_i(\bar{x}, y, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \leftarrow \bigwedge_{p=1}^{q} P_{l_p}(\bar{x}, z_p, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \wedge P_j(z_1, \ldots, z_q, y, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$$

Случай 5: *$f_i(\bar{x}, y)$ получается примитивной рекурсией из функций $f_j(\bar{x})$ и $f_l(\bar{x}, y, z)$, $j, l < i$; более точно, функция определяется соотношениями $f_i(\bar{x}, 0) = f_j(\bar{x})$, $f_i(\bar{x}, y + 1) = f_l(\bar{x}, y, f_i(\bar{x}, y))$.*

В этом случае φ_i – есть конъюнкция универсального замыкания формулы

$$P_i(\bar{x}, \mathbf{0}, t, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \leftarrow P_j(\bar{x}, t, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$$

и универсального замыкания формулы

$$P_i(\bar{x}, \mathbf{s}(y), t, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \leftarrow P_l(\bar{x}, y, u, t, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \wedge P_i(\bar{x}, y, u, \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Определение теории $\mathcal{T}$ завершено.

Лемма 1 *Для всех натуральных чисел* $x_1, \dots, x_n, y$ *выполняется*

$$\mathcal{T} \vdash P_k\left(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \dots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^{y}(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})\right) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = y.$$

($\Leftarrow$) непосредственно следует из определения теории $\mathcal{T}$.

($\Rightarrow$) Определим модель[1] $\mathfrak{M}$, которая будет играть важную роль в оставшейся части доказательства теоремы 1. Основным множеством модели $\mathfrak{M}$ является множество всех натуральных чисел, а сигнатура состоит из константы 0 и функции s, определенной стандартным образом как $s(m) = m+1$. Кроме того, для каждой m–местной функции f_i мы полагаем

$$\mathfrak{M} \models P_i(x_1, \dots, x_m, y, z) \Leftrightarrow (f_i(x_1, \dots, x_m) = y) \wedge (z = 1).$$

Очевидно, $\mathfrak{M} \models \mathcal{T}$.

Предположим, что

$$\mathcal{T} \vdash P_k(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \dots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^{y}(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Тогда $\mathfrak{M} \models \mathcal{T}$ влечет

$$\mathfrak{M} \models P_k(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \dots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^{y}(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})),$$

т.е., $\mathfrak{M} \models P_k(x_1, \dots, x_n, y, 1)$, что по определению $\mathfrak{M}$ дает $f(x_1, \dots, x_n) = y$. $\square$

Для дальнейшего нам потребуется вспомогательное определение и лемма, приведенные ниже.

Пусть π — есть произвольная перестановка некоторого множества M. Пусть $Q \subseteq M^k$ — предикат на M. Предикат $Q^\pi = \{\langle \pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\rangle \mid \langle a_1, \dots, a_k\rangle \in Q\}$ назовем *сопряженным с* Q *при помощи* π. Если $F : M^k \to M$ — операция на M, то *операцию, сопряженную с* F *при помощи* π, определим, как $F^\pi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) = \pi(b) \Leftrightarrow F(a_1, \dots, a_k) = b$. Результатом *сопряжения элемента* $a \in M$ *с помощью* π назовем $\pi(a)$.

Следующее свойство разложимых теорий достаточно очевидно:

Лемма 2 *Пусть теория* $\mathcal{T}$ *разложима на компоненты* $\mathcal{S}_0$ *и* $\mathcal{S}_1$ *сигнатур* Σ_0 *и* Σ_1 *соответственно. Пусть* $\mathfrak{N} \models \mathcal{T}$ *и пусть* π *— произвольная перестановка основного множества модели* $\mathfrak{N}$. *Определим модель* $\mathfrak{N}^\pi$ *как результат замены сигнатурных операций, предикатов и констант из* Σ_0 *на их сопряженные с помощью* π. *Тогда* $\mathfrak{N}^\pi \models \mathcal{T}$.

Продолжим доказательство теоремы 1. Важным свойством построенной теории $\mathcal{T}$ является то, что эта теория остается неразложимой при некоторых её естественных расширениях:

[1] В терминах универсальной алгебры $\mathfrak{M}$ будет *свободной алгеброй ранга* 0 *в квазимногообразии, определенном предложениями* $\mathcal{T}$.

Лемма 3 *Предположим, что $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ выполняется в некотором обогащении $\bar{\mathfrak{M}}$ модели $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathcal{T}' = \mathcal{S}_0 \uplus \mathcal{S}_1$. Тогда либо $\mathtt{sig}(\mathcal{T}) \subseteq \mathtt{sig}(\mathcal{S}_0)$, либо $\mathtt{sig}(\mathcal{T}) \subseteq \mathtt{sig}(\mathcal{S}_1)$.*

Индукцией по $i \in \{1, \ldots, k\}$ покажем, что символы P_i, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{0}$ обязаны принадлежать одной сигнатурной компоненте разложения.

Предположим, что это утверждение верно для всех $l < i$, для некоторого $i \leqslant k$. Покажем, что оно истинно и для i. Рассмотрим несколько случаев:

Случай 1: *f_i – есть функция $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$.*

Подслучай 1.1: $\mathbf{s}, \mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$, *а* $P_i \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Определим перестановку π основного множества модели $\bar{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $s^\pi(0^\pi) \neq 1$. Пусть $\bar{\mathfrak{M}}^\pi$ – модель, полученная из $\bar{\mathfrak{M}}$ заменой на сопряженные всех операций, предикатов и констант, соответствующих символам $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$. Имеем $\bar{\mathfrak{M}} \models \mathcal{T}'$, но, очевидно, $\bar{\mathfrak{M}}^\pi \not\models \forall \bar{x}\, P_i(\bar{x}, x_m, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$, в то время как это предложение принадлежит $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Это противоречит лемме 2, следовательно, данный подслучай не может иметь места.

Подслучай 1.2: $\mathbf{s}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$, *а* $\mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Определим перестановку π основного множества модели $\bar{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $0^\pi \neq 0$. Аргумент, схожий с приведенным выше, показывает, что данный случай также невозможен.

Подслучай 1.3: $\mathbf{0}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$, *а* $\mathbf{s} \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Достаточно выбрать перестановку π основного множества $\bar{\mathfrak{M}}$ со свойством $s^\pi(0) \neq 1$, чтобы показать, что данный случай также не может иметь места.

Из рассмотренных ситуаций следует, что в Случае 1 символы $\mathbf{0}$, $\mathbf{s}$ и P_i должны принадлежать одной сигнатурной компоненте разложения.

Случай 2: *f_i – есть функция $0(x) = 0$.*

Подслучай 2.1: *Символы $\mathbf{0}$ и P_i принадлежат разным сигнатурным компонентам.*

Определим перестановку π основного множества модели $\bar{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $0^\pi \neq 0$. Имеем $\bar{\mathfrak{M}} \models \mathcal{T}'$, но, очевидно, $\bar{\mathfrak{M}}^\pi \not\models \forall x P_i(x, \mathbf{0}, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$, в то время как это предложение принадлежит теории $\mathcal{T}'$. Это противоречит лемме 2, следовательно данный подслучай не может иметь места.

Подслучай 2.2: $\mathbf{0}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$, *а* $\mathbf{s} \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Выберем перестановку π такую, что $s^\pi(0) \neq 1$ и используем аналогичный прием, чтобы показать, что данный подслучай также невозможен.

Заключаем, что в Случае 2 символы $\mathbf{0}$, $\mathbf{s}$ и P_i также обязаны принадлежать одной сигнатурной компоненте разложения.

Случай 3: *f_i – есть функция $s(x) = x + 1$.*

Подслучай 3.1: *$\mathbf{s}$ и P_i принадлежат различным сигнатурным компонентам.*

Определим перестановку π основного множества модели $\bar{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $s^\pi \neq s$ как операции. По лемме 2 имеем $\bar{\mathfrak{M}} \models \mathcal{T}'$, однако $\bar{\mathfrak{M}}^\pi \not\models \forall x\, P_i(x, \mathbf{s}(x), \mathbf{s}(\mathbf{0}))$, в то время как это предложение принадлежит $\mathcal{T}'$. Это противоречит лемме 2, следовательно, этот подслучай невозможен.

Подслучай 3.2: $\mathbf{s}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$, *а* $\mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_{1-u})$, $u \in \{0,1\}$.

Возьмем перестановку π основного множества модели $\bar{\mathfrak{M}}$ такую, что $0^\pi \neq 0$ и используем аналогичный прием, чтобы показать невозможность данного подслучая.

Случай 4: f_i *получается суперпозицией или примитивной рекурсией из некоторых функций, имеющих номера, меньшие, чем* i.

По предположению индукции, символы $\mathbf{s}$, $\mathbf{0}$ и P_j, $j < i$ находятся в одной сигнатурной компоненте разложения. Предположим, что P_i попадает в другую сигнатурную компоненту, т.е. $\mathbf{s}, \mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$, *а* $P_i \in \mathtt{sig}(\mathcal{S}_{1-u})$, $u \in \{0,1\}$.

Определим перестановку π основного множества модели $\bar{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $\pi(1) \neq 1$. Пусть $\bar{\mathfrak{M}}^\pi$ – модель, полученная из $\bar{\mathfrak{M}}$ заменой на сопряженные всех операций, предикатов и констант, соответствующих символам $\mathtt{sig}(\mathcal{S}_u)$. Возьмем произвольные $x_1, \ldots, x_n \in \omega$. По лемме 1 для $y = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ имеем

$$\mathcal{T} \vdash P_i(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^y(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})),$$

но в то же время

$$\bar{\mathfrak{M}}^\pi \not\models P_i(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^y(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Это противоречит лемме 2, значит P_i должен быть в одной сигнатурной компоненте вместе с символами $\mathbf{s}$, $\mathbf{0}$ и P_j для $j < i$. $\Box$

Определим теперь теорию $\mathcal{S}_m$ как:

$$\mathcal{S}_m = \mathcal{T} \cup \{\forall xy\, (Q(y) \leftarrow P_k(x, \mathbf{s}^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})))\},$$

где $\mathcal{T}$ – теория, построенная выше, P_k – предикат, соответствующий функции f, а Q – новый одноместный предикат. Отметим, что индекс теории $\mathcal{S}_m$ вычисляется равномерно по m и гёделеву номеру функции f.

Лемма 4 *Теория* $\mathcal{S}_m$ *разложима тогда и только тогда, когда* $m \in \mathtt{range}\,(f)$.

($\Leftarrow$) По лемме 1 из $m \in \mathtt{range}\,(f)$ следует, что $\mathcal{S}_m = \mathcal{T} \uplus \{\forall y\, Q(y)\}$.

($\Rightarrow$) Предположим, что $m \notin \mathtt{range}\,(f)$ и $\mathcal{S}_m$ разложима: $\mathcal{S}_m = \mathcal{T}_0 \uplus \mathcal{T}_1$. Пусть $\mathfrak{M}_0$ – обогащение модели $\mathfrak{M}$ пустым предикатом Q, т.е. $\mathfrak{M}_0 \models \forall y\, \neg Q(y)$. Тогда очевидно $\mathfrak{M}_0 \models \mathcal{S}_m$. По лемме 3 можно без ограничения общности полагать, что $\mathtt{sig}(\mathcal{T}_0) = \{Q\}$. Имеем $\mathfrak{M}_0 \models \mathcal{T}_0$, таким образом $\mathcal{T}_0$ выполнима на любой счетной структуре с пустым предикатом Q.

Определим $\mathfrak{M}_1$ как модель, полученную из $\mathfrak{M}$ расширением предиката P_k с помощью кортежа $\langle 0, m, 1 \rangle$ и добавлением нового предиката Q, истинного на всех элементах. Имеем $\mathfrak{M}_1 \models \mathcal{S}_m$, поэтому $\mathfrak{M}_1 \models \mathcal{T}_1$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}^*$, получаемую из $\mathfrak{M}_1$ заменой Q на пустой предикат. Имеем $\mathfrak{M}^* \models \mathcal{T}_0$ и $\mathfrak{M}^* \models \mathcal{T}_1$, поэтому из предположения, что $\mathcal{S}_m = \mathcal{T}_0 \uplus \mathcal{T}_1$ мы получаем $\mathfrak{M}^* \models \mathcal{S}_m$. С другой стороны, условия $\mathfrak{M}^* \models P_k(0, \mathbf{s}^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0}))$ и $\mathfrak{M}^* \models \forall y\, \neg Q(y)$ влекут

$$\mathfrak{M}^* \not\models \forall xy\, (Q(y) \leftarrow P_k(x, \mathbf{s}^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0}))),$$

т.е. $\mathfrak{M}^* \not\models \mathcal{S}_m$. Полученное противоречие показывает, что теория $\mathcal{S}_m$ неразложима. $\Box$

Выберем примитивно вычислимую функцию f, такую, что ее область значения – есть Σ^0_1–полное множество (для доказательства того, что f может быть выбрана примитивно вычислимой мы отсылаем читателя к [12], Разделу 4.2, Предложению 4.4). Применяя конструкцию выше, мы получаем семейство теорий $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_m \mid m \in \omega\}$ такое, что область значений f 1-сводится к множеству разложимых теорий из $\mathcal{F}$. Это завершает доказательство Теоремы 1 и показывает Σ^0_1–полноту проблемы разложимости для конечных универсальных хорновских теорий. $\Box$

Теории простых сигнатур

Назовем сигнатуру *простой,* если она конечна и содержит только символы унарных предикатов и констант.

Теорема 2 *Существует алгоритм, позволяющий по произвольной простой сигнатуре Σ и произвольному предложению $\varphi \in L_\Sigma$ определить, разложима ли теория, определяемая семейством аксиом $\{\varphi\}$.*

Теорема будет следовать из следующего предложения:

Предложение 2 *1. Существует эффективная процедура, строящая по произвольным простым сигнатурам σ и τ таким, что $\tau \subseteq \sigma$ и произвольному непротиворечивому предложению $\varphi \in L_\sigma$, некоторое предложение $\varphi^\tau \in L_\tau$ такое, что*

(a) $\varphi \vdash \varphi^\tau$;

(b) для любого $\psi \in L_\tau$ условие $\varphi \vdash \psi$ влечет $\varphi^\tau \vdash \psi$.

2. Теория всех моделей любой простой сигнатуры разрешима. При этом соответствующий разрешающий алгоритм строится эффективно по данной простой сигнатуре.

Покажем, как получить Теорему 2 из Предложения 2. Сначала, используя разрешимость, проверяем, является ли φ тождественно ложным предложением. Если да, то теория $\{\varphi\}$, очевидно, разложима в случае, когда сигнатура содержит более одного символа и неразложима в остальных случаях. Если φ не тождественно ложно, то достаточно заметить, что теория $\{\varphi\}$ разложима на компоненты сигнатур σ_0 и σ_1 тогда и только тогда, когда

$$\{\varphi\} = \{\varphi^{\sigma_0}\} \uplus \{\varphi^{\sigma_1}\}. \tag{1}$$

Действительно, пусть теория $\{\varphi\}$ разложима на компоненты сигнатур σ_0 и σ_1. Отсюда по компактности следует существование предложений $\varphi_0 \in L_{\sigma_0}$ и $\varphi_1 \in L_{\sigma_1}$ таких, что $\{\varphi\} = \{\varphi_0\} \uplus \{\varphi_1\}$. Имеем:

$$\varphi \vdash \varphi^{\sigma_0}, \quad \varphi \vdash \varphi^{\sigma_1}. \tag{2}$$

С другой стороны

$$\varphi^{\sigma_0} \vdash \varphi_0, \quad \varphi^{\sigma_1} \vdash \varphi_1. \tag{3}$$

С учетом того, что $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \vdash \varphi$, условия (2) и (3) дают нам требуемое (1). Обратное утверждение тривиально. В силу разрешимости теории всех моделей простой сигнатуры условие (1) проверяется эффективно и, таким образом, получается утверждение Теоремы 2.

Докажем Предложение 2 и опишем сначала некоторые нормальные формы предложений простых сигнатур. Пусть

$$\sigma = \left\langle (P_i)_{i<l}\,; (c_i)_{i<q} \right\rangle; \quad l, q < \omega$$

— произвольная простая сигнатура. Пусть A — произвольное множество ее констант (не обязательно всех) и E — произвольное отношение эквивалентности на A. Определим предложение η_E, полностью описывающее эту эквивалентность, как

$$\eta_E \quad = \bigwedge_{\langle c,k\rangle \in E} (c = k) \;\wedge \bigwedge_{c,k\in A, \langle c,k\rangle \notin E} (c \neq k).$$

Если P — унарный предикат, то определим $P^0(x) = \neg P(x)$ и $P^1(x) = P(x)$. Если $\varepsilon \in 2^m$ и $P_0, \ldots, P_{m-1}$ — унарные предикаты, то определим $P^\varepsilon(x) = \bigwedge_{i<m} P_i^{\varepsilon_i}(x)$. Если A — множество констант, то $x \notin A$ служит сокращением для формулы $\bigwedge_{c\in A}(x \neq c)$. Далее, $\exists^{\geqslant n} x \ldots$ и $\exists^{=n} x$____ будут служить сокращениями для формул, выражающих утверждения '*существует как минимум n таких x, что …*' и '*существует в точности n таких x, что* ____' соответственно. Если C — конечное множество констант, то выражение $C \subseteq P^\varepsilon$ служит сокращением для $\bigwedge_{c\in C} P^\varepsilon(c)$. Пусть $n \in \omega$, $\varepsilon \in 2^m$, C — произвольное конечное множество констант и E — эквивалентность на C. Определим предложения

$$\varphi^{=n}_{\varepsilon,E,C} \quad = \quad \exists^{=n} x \left(P^\varepsilon(x) \wedge x \notin C \wedge \eta_E \wedge C \subseteq P^\varepsilon\right),$$

$$\varphi^{\geqslant n}_{\varepsilon,E,C} \quad = \quad \exists^{\geqslant n} x \left(P^\varepsilon(x) \wedge x \notin C \wedge \eta_E \wedge C \subseteq P^\varepsilon\right),$$

описывающие структуру модели на элементах ее разбиения, определяемых предикатами P^ε.

Базисными формулами для простой сигнатуры σ назовем формулы вида $\bigwedge_{\varepsilon\in 2^l} \Phi_\varepsilon$, где Φ_ε — предложение вида $\varphi^{=n}_{\varepsilon,E_\varepsilon,C_\varepsilon}$ либо $\varphi^{\geqslant n}_{\varepsilon,E_\varepsilon,C_\varepsilon}$, причем множества C_ε обладают свойствами $C_{\varepsilon_0} \cap C_{\varepsilon_1} = \varnothing$ при $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$, $\{c_i \mid i < q\} = \bigcup_{\varepsilon\in 2^l} C_\varepsilon$; и E_ε — отношение эквивалентности на C_ε для всех $\varepsilon \in 2^l$.

Следующая лемма достаточно очевидна:

Лемма 5 *Пусть φ и ψ — базисные формулы. Тогда их конъюнкция либо тождественно ложна, либо эквивалентна некоторой базисной формуле.*

Введем еще некоторые обозначения. Пусть Δ — произвольное множество предложений. Запись $\mathfrak{M}(\Delta)\mathfrak{N}$ означает, что для всех $\varphi \in \Delta$ условие $\mathfrak{M} \models \varphi$ влечет $\mathfrak{N} \models \varphi$. Нам понадобится следующее

Предложение 3 ([13, Лемма 3.2.1]) *Пусть Δ — семейство предложений, замкнутое относительно дизъюнкций и пусть $\mathcal{T}$ — совместная теория такая, что для всех моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M} \models \mathcal{T}$ и $\mathfrak{M}(\Delta)\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N} \models \mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{T}$ аксиоматизируема предложениями из Δ.*

Следствие 1 *Любое непротиворечивое предложение простой сигнатуры эквивалентно дизъюнкции базисных формул.*

Возьмем в качестве Δ в предложении 3 множество всех базисных формул, замкнутое относительно дизъюнкций. Тогда для не более чем счетных моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ условие $\mathfrak{M}(\Delta)\mathfrak{N}$ влечет $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, откуда утверждение легко следует. Для оставшейся части доказательства остается применить Предложение 3 и затем Лемму 5. $\square$

Продолжим доказательство предложения 2. Теперь мы можем определить формулы φ^τ для $\tau \subseteq \sigma$. Ввиду Следствия 1, мы можем предполагать, что любая выполнимая формула есть дизъюнкция базисных формул. Сначала определим φ^τ для базисных формул φ. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\tau = \left\langle (P_i)_{i<l'}\,; (c_i)_{i<q'} \right\rangle; \quad l' \leqslant l,\ q' \leqslant q.$$

Пусть φ — базисная формула сигнатуры σ и

$$\varphi = \bigwedge_{\varepsilon \in 2^l} \varphi^{\lambda_\varepsilon n_\varepsilon}_{\varepsilon, E_\varepsilon, C_\varepsilon}, \quad \lambda_\varepsilon \in \{=, \geqslant\},\ \text{для всех } \varepsilon \in 2^l.$$

Для каждого $\varepsilon \in 2^{l'}$ рассматриваем все γ такие, что $\varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l$ и для каждого такого γ полагаем m_γ равным числу классов эквивалентности E_γ, не содержащих констант из множества $C' = \{c_i \mid i < q'\}$. Далее определяем предложение ϕ_ε, как

$$\exists^{\lambda_\varepsilon m_\varepsilon} x \left[P^\varepsilon(x) \wedge \left(x \notin \bigcup_{\varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l} C_\gamma \cap C' \right) \wedge \eta_{E_\varepsilon} \wedge \left(\bigcup_{\varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l} C_\gamma \cap C' \subseteq P^\epsilon \right) \right],$$

где

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= \bigcup_{\varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l} E_\gamma, \\ m_\varepsilon &= \sum_{\varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l} (n_\gamma + m_\gamma), \\ \lambda_\varepsilon &= \begin{cases} \geqslant & \text{если хотя бы одно из } \lambda_\gamma, \varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l \text{ равно } \leqslant \\ = & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Положим теперь φ^τ равным $\bigwedge_{\varepsilon \in 2^{l'}} \phi_\varepsilon$. Если φ является дизъюнкцией базисных формул θ_i, $i \in I$, то полагаем φ^τ равным $\bigvee_{i \in I} \theta_i^\tau$.

Лемма 6 *1. $\varphi \vdash \varphi^\tau$;*

2. любая модель для φ^τ обогащается до модели φ;

3. если $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \in L_\tau$, то $\varphi^\tau \vdash \psi$.

Первые два свойства достаточно очевидны. Для доказательства третьего свойства предположим, что $\mathfrak{M} \models \varphi^\tau$ и покажем, что $\mathfrak{M} \models \psi$. Обогатим $\mathfrak{M}$ до модели $\mathfrak{M}' \models \varphi$. Получим $\mathfrak{M}' \models \psi$. Обедняя эту модель до сигнатуры τ, получим $\mathfrak{M} \models \psi$. Значит $\varphi^\tau \vdash \psi$. $\square$

Заметим, что описанная выше процедура вычисления φ^τ по дизъюнкции базисных формул является эффективной. Для произвольного предложения φ простой сигнатуры, перебирая сначала все возможные выводы, находим дизъюнкцию базисных формул, эквивалентную φ. После этого применение указанной процедуры дает соответствующее предложение φ^τ.

Разрешимость теории $\mathcal{T}$ всех моделей произвольной простой сигнатуры σ следует из ее перечислимости и следующего достаточно просто устанавливаемого факта: существует вычислимая последовательность теорий $(\mathcal{T}_i)_{i<\omega}$, состоящих из всех полных расширений теории $\mathcal{T}$ (для полного задания полного расширения $\mathcal{T}$ достаточно указать все соотношения равенства и неравенства между константами, их распределение по предикатам P^ε, а также количество элементов — от 0 до ∞ в этих предикатах P^ε, не равных ни одной константе, что легко делается с помощью базисных формул и дает счетно категоричные теории), а также следующего результата Ю.Л.Ершова

Теорема 3 ([14]) *Теория $\mathcal{T}$ разрешима тогда и только тогда, когда она перечислима и существует вычислимая последовательность полных теорий $(T_i)_{i<\omega}$ такая, что $\mathcal{T} = \bigcap_{i<\omega} \mathcal{T}_i$.*

Предложение 2 доказано.

Авторы благодарят Проф. Др. Карла Эриха Вольффа за гостеприимство во время визита авторов в Дармштадтский Технический Университет (Германия), где была получена часть этих результатов, а также всех участников международного проекта РФФИ-DFG "COMO"и О.В.Кудинова за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

[1] Amir E., McIlraith S. Partition-based logical reasoning for first-order and propositional theories. // Artificial Intelligence. – 2005 – N 162 (1-2) – P. 49-88.

[2] B. Cuenca Grau, I. Horrocks, Y. Kazakov, U. Sattler. Modular reuse of ontologies: Theory and practice. // Journal of Artificial Intelligence Research. – 2008 – N 31 – P. 273—318.

[3] Cuenca Grau B., Horrocks I., Kazakov Y., Sattler U. Extracting modules from ontologies: Theory and practice. — Manchester, 2007. — 39 p. — (Technical report / University of Manchester / http://www.cs.man.ac.uk/∼bcg/Publications.html).

[4] B. Konev, C. Lutz, D. Walther, F. Wolter. Formal properties of modularization. // LNCS Volume on Ontology Modularization. – Springer Verlag, 2008.

[5] Lutz C., Walther D., Wolter F. Conservative extensions in expressive description logics. // Proc. / IJCAI-07 – 2007 – P. 453-458.

[6] Пономарев Д.К., Критерий разложимости элементарных теорий. // Сибирский математический журнал. – 2008 – N 49 (1) – С. 189-192.

[7] Ponomaryov D. On decomposability in logical calculi. // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center / Computer Science - Novosibirsk, 2008 - IIS Special Issue: 28 - C. 111-120.

[8] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир, 1972.

[9] Шёнфилд Дж., Математическая логика. – М.: Наука, 1975.

[10] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А., Математическая логика. – М.: Наука, 1979.

[11] Lloyd J.W., Foundations of Logic Programming. – Springer–Verlag, 1987.

[12] Cohen D.E., Computability and Logic. – Ellis Horwood, 1987.

[13] Г. Кейслер, Ч.Ч. Чэн, Теория моделей. – М.: Мир, 1977.

[14] Ершов Ю.Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики СО РАН
им. С. Л. Соболева
пр. Коптюга 4,
630090, Новосибирск
Тел.: +7(383) 3333197
Факс: +7(383) 3332598
E–mail: morozov@math.nsc.ru

Пономарев Денис Константинович
Институт систем информатики СО РАН
им. А. П. Ершова
пр. Лаврентьева, 6
630090, Новосибирск
Тел.: +7(383) 3306660
Факс.: +7(383) 3323494
E–mail: ponom@iis.nsk.su