Критерий разложимости элементарных теорий. *

Д.К.Пономарёв

Аннотация

В статье установлена однозначность разложения элементарной теории на неразложимые компоненты. Сформулирован критерий разложимости.

Определение 1 *Теория $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ называется* ***разложимой****, если она является дедуктивным замыканием всех предложений некоторых теорий $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ дизъюнктных сигнатур Σ_1, Σ_2, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, в исчислении предикатов сигнатуры Σ (обозначаем $\mathcal{T} = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2$).*
Теории $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ будем называть ***компонентами*** *(разложения) теории $\mathcal{T}$.*

Как правило, при изучении теорий нас будут интересовать нетривиальные разложения, в которых $\Sigma_1 \neq \varnothing \neq \Sigma_2$. При этом будем полагать, что каждая компонента разложения включает все формулы чистого равенства теории $\mathcal{T}$. Тогда каждая компонента $\mathcal{S}_i$ сигнатуры Σ_i включает все предложения сигнатуры Σ_i из теории $\mathcal{T}$. К примеру, если сигнатура Σ состоит только из одного символа, то любая теория этой сигнатуры имеет только тривиальное разложение.

Сформулируем основную задачу, которую мы исследуем в данной работе. *Рассмотрим теорию $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ, определенную некоторым множеством предложений Φ сигнатуры Σ. Как, исходя из системы аксиом Φ, определить, является ли разложимой теория $\mathcal{T}$?*

Эта задача поставлена Д. Е. Пальчуновым в работе [1]. Интерес к этой проблеме исходит из практики и связан с такими задачами, как

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-04003-ННИО_а (DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0-1).

разработка систем автоматического доказательства теорем [2] и сопровождение терминологических систем [3, 4].

В данной работе представим решение указанной задачи. В разд. 1 введем понятие неразложимого предложения и заметим, что такие предложения определяют компоненты разложения теории. Далее сформулируем результат об однозначности разложения элементарной теории на неразложимые компоненты. Отметим, что главным теоретико-модельным инструментом исследования в статье служит интерполяционная теорема Крейга [5].

В разд. 2 опишем метод определения компонент разложения по заданной теории. Исходя из этого метода, сформулируем критерий разложимости.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Д. Е. Пальчунову и анонимному рецензенту за ценные рекомендации по улучшению содержания статьи.

1 Теорема об однозначности разложения

Предложение 1 *Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ — теории дизъюнктных сигнатур $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, а φ — некоторое предложение сигнатуры Σ.*

Если φ следует из объединения теорий $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$, то найдутся предложения $\theta \in \mathcal{P}$, $\phi \in \mathcal{Q}$ такие, что $\theta, \phi \vdash \varphi$, причем предложение θ содержит только те символы сигнатуры Σ_1, которые встречаются в φ, и предложение ϕ содержит только те символы сигнатуры Σ_2, которые встречаются в φ.

Так как $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \vdash \varphi$, то найдутся предложения $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$, для которых $P,\ Q \vdash \varphi$. Тогда $P \vdash Q \to \varphi$.

Поскольку P и Q — формулы сигнатур Σ_1, Σ_2, не имеющих общих символов, по интерполяционной теореме Крейга найдется предложение θ, содержащее только символы сигнатуры Σ_1, которые присутствуют в φ. При этом $P \vdash \theta$ и $\theta \vdash Q \to \varphi$. Отсюда $Q \vdash \theta \to \varphi$.

Аналогично существует такое предложение ϕ, которое содержит только символы сигнатуры Σ_2, включенные в формулу φ, для которого $Q \vdash \phi$, $\phi \vdash \theta \to \varphi$.

Следовательно, $\theta, \phi \vdash \varphi$. $\square$

Определение 2 *Рассмотрим теорию $\mathcal{T}$ и предложение $\varphi \in \mathcal{T}$.*

Назовем φ ***разложимым в теории*** *$\mathcal{T}$, если найдутся такие предложения $\theta \in \mathcal{T}$, $\psi \in \mathcal{T}$, которые включают символы только из φ, не содержат общих сигнатурных символов, не являются формулами чистого равенства, и для которых выполнена секвенция $\theta, \psi \vdash \varphi$. При этом θ и ψ будем называть* ***фрагментами разложения*** *φ.*

Если таких θ, ψ не существует, то предложение φ будем называть ***неразложимым в теории*** *$\mathcal{T}$.*

Лемма 1 *Рассмотрим теорию $\mathcal{T}$ и некоторое предложение $\varphi \in \mathcal{T}$. Тогда в теории $\mathcal{T}$ найдется последовательность неразложимых предложений $\phi_1, \dots, \phi_n$ таких, что $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \varphi$.*

Рассмотрим множество $T_1 = \{\varphi\}$. Возьмем фрагменты разложения ϕ, ψ для предложения φ, если таковые найдутся в теории $\mathcal{T}$; построим множество $T_2 = \{\phi, \psi\}$. Применим указанное преобразование к предложениям из T_2 и будем повторять его, образуя последовательность T_1, T_2, $T_3, \dots$. Каждое предложение содержит лишь конечное число сигнатурных символов, поэтому каждое предложение может быть последовательно разложено только конечное число раз. Таким образом, для некоторого k множество $T_k = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ будет содержать только неразложимые предложения, для которых $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \varphi$. $\Box$

Теорема 1 *Пусть $\mathcal{T}$ — теория сигнатуры Σ. Тогда $\mathcal{T}$ имеет единственное разложение на неразложимые компоненты.*

Более точно, существует единственное разбиение Π сигнатуры Σ такое, что $\mathcal{T} = \uplus\{\mathcal{T}_\sigma \mid \sigma \in \Pi\}$, где $\mathcal{T}_\sigma$ — теория, состоящая в точности из всех предложений теории $\mathcal{T}$ сигнатуры σ и не имеющая нетривиальных разложений.

Пусть $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{T}$ — теория сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, состоящая из всех предложений теории $\mathcal{T}$ этой сигнатуры. Тогда $\mathcal{S}_1$ является компонентой разложения теории $\mathcal{T}$ в том и только в том случае, если выполнено следующее условие ($*$): для любого предложения φ сигнатуры $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_1 \neq \varnothing$, неразложимого в $\mathcal{T}$, имеет место включение $\Sigma_\varphi \subseteq \Sigma_1$.

Докажем это утверждение.

$\Rightarrow$: Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2$, где $\mathcal{S}_2$ — теория сигнатуры $\Sigma_2 = \Sigma \backslash \Sigma_1$. Предположим, что $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$. Тогда $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \vdash \varphi$ и по предложению 1 φ разложимо, что противоречит условию.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathcal{S}_2$ — теория сигнатуры $\Sigma_2 = \Sigma \backslash \Sigma_1$, состоящая из всех предложений теории $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ_2. Пусть ψ — некоторое предложение теории $\mathcal{T}$. Тогда по лемме 1 в $\mathcal{T}$ найдется последовательность неразложимых предложений $\phi_1, \ldots, \phi_n$ таких, что $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$. В силу условия $(*)$ имеем $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ и, следовательно, $\mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2 \vdash \psi$.

Таким образом, некоторое подмножество $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ соответствует неразложимой компоненте теории $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию $(*)$ и не имеет собственного подмножества, удовлетворяющего этому условию. Заметим, что совокупность подмножеств сигнатуры Σ, удовлетворяющих условию $(*)$, замкнута относительно пересечений, следовательно, любой символ сигнатуры Σ содержится в единственном минимальном подмножестве сигнатуры Σ со свойством $(*)$, и эти минимальные подмножества не пересекаются. $\square$

2 Критерий разложимости

Из доказательства теоремы 1 следует, что любое неразложимое предложение теории $\mathcal{T}$ содержит сигнатурные символы только из одной компоненты разложения. Это позволяет определить разбиение сигнатуры и компоненты разложения теории $\mathcal{T}$, исходя из системы аксиом теории $\mathcal{T}$.

Формализуем полученный результат с помощью следующего ниже понятия. Приведем его для произвольной системы аксиом Φ некоторой теории $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ.

Определение 3 *Два сигнатурных символа $p, q \in \Sigma$ назовем **непосредственно связанными** (системой аксиом Φ теории $\mathcal{T}$), если p и q входят в одну аксиому $\psi \in \Phi$.*

*Символы p, q назовем **связанными** (системой аксиом Φ), если найдется такая последовательность символов $p = t_1, \ldots, t_k = q$, в которой любая соседняя пара t_i, t_{i+1} связана непосредственно.*

Таким образом, для заданной системы аксиом Φ определяется неориентированный помеченный граф (с петлями в вершинах), вершинами которого служат символы сигнатуры, а аксиомы определяют связывающие их ребра. Отношение связанности является отношением эквивалентности, так что множество Σ разбивается на компоненты связности — классы эквивалентности. Будем говорить, что система аксиом Φ *определяет компоненты связности на сигнатуре* Σ.

Замечание 1 *Любая теория $\mathcal{T}$ имеет систему аксиом, состоящую из предложений, неразложимых в $\mathcal{T}$.*

Замечание 2 *Пусть $\mathcal{T}$ — теория сигнатуры Σ и Φ — система аксиом теории $\mathcal{T}$, состоящая из предложений, неразложимых в $\mathcal{T}$.*

Тогда Φ определяет на сигнатуре Σ компоненту связности $\sigma \subseteq \Sigma$ в том и только в том случае, если $\sigma \in \Pi$, где Π — разбиение сигнатуры Σ, отвечающее разложению теории $\mathcal{T}$ на неразложимые компоненты.

В силу теоремы 1 получаем, что любая система аксиом теории $\mathcal{T}$, неразложимых в $\mathcal{T}$, определяет одни и те же компоненты связности на сигнатуре теории $\mathcal{T}$. Таким образом, приходим к критерию разложимости элементарной теории $\mathcal{T}$.

Критерий разложимости *Теория $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ является разложимой тогда и только тогда, когда некоторая система аксиом теории $\mathcal{T}$, неразложимых в $\mathcal{T}$, индуцирует более чем одну компоненту связности на сигнатуре Σ.*

Список литературы

[1] **Palchunov D.** GABEK for ontology generation. // Integration and Learning in Organizations. / J. Zelger, P. Herdina, A. Oberprantacher; Bd. II – Wien: LIT-publishing Company, 2005.

[2] **Amir E., McIlraith S.** Partition-based logical reasoning for first-order and propositional theories. // Artificial Intelligence. – 2005 – N 162 (1-2) – P. 49-88.

[3] **Cuenca-Grau B., Parsia B., Sirin E., Kalyanpur A.** Modularity and Web ontologies. // Proc. / KR2006 – 2006 – P. 198-208.

[4] **Lutz C., Walther D., Wolter F.** Conservative extensions in expressive description logics. // Proc. / IJCAI-07 – 2007 – P. 453-458.

[5] **Кейслер Г., Чэн Ч.Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977.