О разложимости в логических исчислениях ⋆

Д.К. Пономарев

Институт Систем Информатики СО РАН
ponom@iis.nsk.su

Аннотация В статье фиксируется некоторый естественный класс логических исчислений, относительно которого формулируется понятие Δ–разложимого множества формул. Показывается, что свойство однозначности сигнатурных разложений имеет место в тех исчислениях данного класса, которые обладают интерполяционным свойством Крейга. В заключение приводится достаточное условие алгоритмической разрешимости свойства Δ–разложимости.

1 Введение

В информатике декомпозиция является стандартным приемом для понижения сложности задач. В логике понятие декомпозиции встречается в разных применениях, среди которых важным является машинный вывод над логическими теориями. Основная идея состоит в том, чтобы выделить в теории те фрагменты, которые необходимы и достаточны для проверки заданного свойства, тем самым сокращая пространство поиска и сложность машинного вывода. Известен ряд работ, в которых рассматриваются методы декомпозиции логических теорий. Среди них можно выделить синтаксический подход к разбиению теорий [1], основанный на графах и разработанный в рамках новых методов для автоматического доказательства теорем. Основанные на выводимости подходы к нахождению «независимых частей» теорий в модальных и дескриптивных логиках [10,2,3], а также семантические подходы [9], тесно связанные с результатами о консервативных расширениях [7,11], широко используются в изучении терминологических систем.

При наличии интерполяции естественным подходом является рассмотрение сигнатурных разбиений теорий. Если теория $\mathcal{T}$ представлена в виде объединения «независимых» теорий дизъюнктных сигнатур, то проверка выводимости из $\mathcal{T}$ некоторой формулы φ сигнатуры σ сводится к выводимости φ только из тех компонент разбиения, сигнатура которых имеет непустое пересечение с σ. Для каких логических исчислений существует алгоритм нахождения сигнатурных разбиений произвольно заданного множества формул и когда такой алгоритм можно определить детерминированным? Какими свойствами должно обладать исчисление, чтобы сигнатурное

⋆ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-04003-ННИО_а (DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0-1).

разбиение любого его множества формул определялось однозначно? В данной статье мы даем частичный ответ на эти вопросы. Мы формализуем понятие сигнатурного разбиения с помощью общего понятия Δ–разложимости и исследуем свойство однозначности сигнатурных разложений. Данное свойство гарантирует то, что каждая теория имеет единственное представление в виде объединения неразложимых теорий. Указанием необходимых свойств отношения выводимости, мы определяем класс исчислений, удовлетворяющих свойству однозначности сигнатурных разложений, и класс исчислений, допускающих алгоритмическую процедуру для нахождения нетривиальных разложений произвольно заданного множества формул. Неудивительно, что исследуемые понятия оказываются близки к важным интерполяционным свойствам, изучаемым в логиках: интерполяционному свойству Крейга и униформному интерполяционному свойству. В данной работе мы пытаемся сформулировать идеи, касающиеся сигнатурной разложимости, в наиболее общей форме, поэтому вопросы вычислительной сложности и специфические результаты, доказанные для конкретных исчислений, специально оставлены за рамками статьи. Представленные в статье результаты непосредственно переносятся на классическую, интуиционистскую логику и широкий спектр модальных логик.

2 Предварительные замечания

Данная статья представляет собой обобщение результатов, изложенных в [13]. В этой работе для логики первого порядка было введено понятие разложимой теории и доказан результат о существовании канонического разложения у любой теории в языке первого порядка. Поскольку доказательство данного результата использовало лишь синтаксические свойства языка первого порядка, оказалось возможным расширить его на довольно широкий класс логических исчислений. Таким образом, доказательства результатов в данной статье следуют идеям из [13], но расширяют доказанное в этой работе с точки зрения более общего понятия Δ–разложимости и изучения данного понятия в широком естественном классе логических исчислений.

Все утверждения в данной статье формулируются относительно логического исчисления $\mathcal{L}$ с отношением следования $\vdash_{\mathcal{L}}$, свойства которого определим ниже. В языке исчисления $\mathcal{L}$ мы выделяем два непересекающихся множества символов - логических и нелогических. Если φ — некоторая формула исчисления $\mathcal{L}$, то под сигнатурой формулы φ мы понимаем множество нелогических символов, присутствующих в ее записи. Будем считать, что каждая формула исчисления $\mathcal{L}$ имеет конечную длину. Если Γ, Λ - множества формул в $\mathcal{L}$, то запись $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Lambda$ означает, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ для любой формулы $\varphi \in \Lambda$. При этом будем говорить, что множество формул Λ выводимо из Γ. Множества формул Γ и Λ эквивалентны (сокращение $\Gamma \sim_{\mathcal{L}} \Lambda$), если $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Lambda$ и $\Lambda \vdash_{\mathcal{L}} \Gamma$. Запись $\Gamma, \Lambda \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ традиционно означает $\Gamma \cup \Lambda \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Будем полагать, что отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойствам экстенсиональности, транзитивности, компактности, адъюнкции и тавтологий. Более точно, если φ — есть некоторая формула исчисления $\mathcal{L}$ и Γ, Λ - множества формул в $\mathcal{L}$, то считаем выполненными следующие свойства:

– если $\varphi \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (экст.);
– $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \Lambda$ и $\Lambda \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, следовательно, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (транз.);
– если $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, то существует конечное $\Lambda \subseteq \Gamma$ такое, что $\Lambda \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (комп.);
– если Γ — конечное множество формул сигнатуры Σ, то существует формула $\phi \in \mathcal{L}$ сигнатуры Σ такая, что для любой формулы $\psi \in \mathcal{L}$ имеет место $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ тогда и только тогда, когда $\phi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ (адъюнк.);
– для любого конечного множества сигнатурных символов Σ существует формула φ, использующая все символы сигнатуры Σ, такая, что $\varnothing \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (тавт.).

Будем считать, что в $\mathcal{L}$ для некоторого логического символа, который обозначим здесь через $\bowtie$, для любого множества формул Γ и любых формул φ, ψ справедливо дедуктивное свойство в виде:

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi' \bowtie \psi,$$

причем сигнатуры формул φ и φ' совпадают.

Определение 1 *Отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет интерполяционному свойству Крейга, если для любой пары формул φ, ψ сигнатур $\Sigma_\varphi, \Sigma_\psi$ таких, что $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, существует формула θ сигнатуры $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_\psi$, для которой выполнено $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \theta$ и $\theta \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.*

Отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойству сильных следствий, если для любой формулы φ сигнатуры Σ_φ и любого подмножества $\Sigma \subseteq \Sigma_\varphi$ найдется формула θ сигнатуры Σ такая, что:

– *$\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \theta$;*
– *если ψ — формула сигнатуры $\Sigma_\psi \subseteq \Sigma$ и $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, то $\theta \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.*

Формулу θ из условий выше будем называть сильным следствием φ в сигнатуре Σ.

Определение 2 *Пусть $\mathcal{T}$ — множество формул сигнатуры Σ и $\Delta \subseteq \Sigma$ — некоторое подмножество этой сигнатуры. Назовем $\mathcal{T}$ Δ–разложимым, если найдутся непустые множества формул $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ сигнатур Σ_1, Σ_2 такие, что $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Delta$ и $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{L}} \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.*

Пару $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle$ будем называть Δ–разложением множества формул $\mathcal{T}$, а $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ будем называть компонентами Δ–разложения $\mathcal{T}$. Назовем Δ–разложение тривиальным, если $\Sigma_i = \Delta$ для некоторого $i = 1, 2$.

Если Δ — пустое множество, то мы имеем разложение на компоненты с непересекающимися сигнатурами. Поскольку отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойству тавтологий, очевидно, что при изучении Δ–разложимых множеств формул представляют интерес нетривиальные разложения, в которых $\Sigma_1 \neq \Delta \neq \Sigma_2$. К примеру, если сигнатура Σ состоит лишь из одного символа, то любое множество формул этой сигнатуры имеет только тривиальные Δ–разложения.

Определение 3 *Отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойству однозначности сигнатурных разложений, если выполнено следующее условие:*

для любого множества формул $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ и любого подмножества $\Delta \subseteq \Sigma$ существует единственное разбиение Π сигнатуры $\Sigma \setminus \Delta$ такое, что $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{L}} \bigcup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\}$, где каждое $\mathcal{T}_\pi$ — есть множество формул сигнатуры $\pi \cup \Delta$, эквивалентное множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре $\pi \cup \Delta$, и не имеющее нетривиальных Δ–разложений.

Будем далее полагать, что если множество Π, определяющее разбиение сигнатуры $\Sigma \setminus \Delta$, пусто, то $\bigcup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\}$ эквивалентно множеству формул $\mathcal{T}$.

3 Основные результаты

Теорема 1 *Предположим, что отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет интерполяционному свойству Крейга. Тогда $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойству однозначности сигнатурных разложений.*

Предположим, что имеет место интерполяционное свойство и докажем три вспомогательные леммы.

Лемма 1 *Пусть Ψ_1, Ψ_2 — множества формул сигнатур Σ_1, Σ_2, соответственно, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Delta$, а φ — есть некоторая формула сигнатуры Σ_φ.*

Если $\Psi_1, \Psi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, то найдутся формулы θ_1, θ_2 соответствующих сигнатур Σ_1, Σ_2 такие, что $\Psi_i \vdash_{\mathcal{L}} \theta_i$ (для $i = 1, 2$), $\theta_1, \theta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ и каждая формула θ_i для $i = 1, 2$ содержит из сигнатуры $\Sigma_i \setminus \Delta$ только те символы, которые встречаются в φ.

Так как $\Psi_1, \Psi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, по свойствам экстенсиональности, компактности и адъюнкции, которыми обладает отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$, найдутся формулы ψ_1 и ψ_2 соответствующих сигнатур Σ_1, Σ_2 такие, что $\Psi_i \vdash_{\mathcal{L}} \psi_i$ для $i = 1, 2$ и $\psi_1, \psi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Тогда по дедуктивному свойству $\mathcal{L}$ имеем $\psi_1 \vdash_{\mathcal{L}} \psi_2' \bowtie \varphi$, причем сигнатура ψ_2' совпадает с сигнатурой формулы ψ_2.

Заметим, что ψ_1 и ψ_2' — формулы сигнатур Σ_1, Σ_2 таких, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \subseteq \Delta$, а φ — формула в некоторой сигнатуре Σ_φ. Тогда по интерполяционному свойству найдется формула θ_1 сигнатуры Σ_1, включающая из множества $\Sigma_1 \setminus \Delta$ только те символы, которые присутствуют в φ, при этом, $\psi_1 \vdash_{\mathcal{L}} \theta_1$ и

$\theta_1 \vdash_{\mathcal{L}} \psi_2' \bowtie \varphi$. Отсюда $\psi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \theta_1' \bowtie \varphi$, причем θ_1' — формула сигнатуры Σ_1, а ψ_2 — формула сигнатуры Σ_2.

Аналогично, найдется формула θ_2 сигнатуры Σ_2, содержащая из множества $\Sigma_2 \setminus \Delta$ только те символы, которые включены в формулу φ, причем, $\psi_2 \vdash_{\mathcal{L}} \theta_2$ и $\theta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \theta_1' \bowtie \varphi$. Снова применяя дедуктивное свойство $\mathcal{L}$, получаем искомые формулы θ_1 и θ_2, для которых $\theta_1, \theta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. $\Box$

Исходя из леммы 1, введем следующее

Определение 4 *Рассмотрим множество формул $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ и подмножество $\Delta \subseteq \Sigma$. Пусть φ – некоторая формула и Σ_φ – ее сигнатура. Назовем φ Δ–разложимой в $\mathcal{T}$, если найдутся формулы θ_1, θ_2 соответствующих сигнатур Σ_1, Σ_2 такие, что $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subseteq \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \subseteq \Delta$, $\Sigma_1 \cap \Delta \neq \Sigma_1$, $\Sigma_2 \cap \Delta \neq \Sigma_2$, $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \setminus \Delta \subseteq \Sigma_\varphi$ и для которых выполнено $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \theta_i$ (для i=1,2) и $\theta_1, \theta_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

При этом формулы θ_1, θ_2 будем называть фрагментами Δ–разложения для φ в $\mathcal{T}$. Если таких θ_1, θ_2 не существует, то формулу φ будем называть Δ–неразложимой в $\mathcal{T}$.

Замечание 1 *Пусть $\mathcal{T}$ — множество формул сигнатуры Σ, а $\Delta \subseteq \Sigma$ — некоторое подмножество этой сигнатуры. Любая формула φ сигнатуры $\Sigma_\varphi \subseteq \Delta$, согласно определению 4, является Δ–неразложимой в $\mathcal{T}$. Действительно, из условия $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \setminus \Delta \subseteq \Sigma_\varphi$ в этом случае имеем $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \setminus \Delta = \varnothing$, следовательно, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subseteq \Delta$ и значит, $\Sigma_i \cap \Delta = \Sigma_i$, $i = 1, 2$, что противоречит условиям в определении 4.*

Лемма 2 *Рассмотрим множество формул $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ и некоторую формулу φ такую, что $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Для любого подмножества $\Delta \subseteq \Sigma$ найдется последовательность формул $\theta_1, \ldots, \theta_n$, Δ—неразложимых в $\mathcal{T}$, таких, что $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \theta_i$ для $i = 1, .., n$ и $\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

Рассмотрим множество $T_1 = \{\varphi\}$. Возьмем фрагменты Δ–разложения ξ, ψ для формулы φ, если такие найдутся в $\mathcal{T}$; построим множество $T_2 = \{\xi, \psi\}$. Применим указанное преобразование к формулам из T_2 и будем повторять его, образуя последовательность $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Каждая формула исчисления $\mathcal{L}$ имеет конечную длину, значит содержит конечное число сигнатурных символов и может быть последовательно разложена только конечное число раз. Таким образом, для некоторого k множество $T_k = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ будет содержать только формулы Δ–неразложимые в $\mathcal{T}$, для которых, в силу свойства транзитивности отношения $\vdash_{\mathcal{L}}$, выполнено $\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. $\Box$

Лемма 3 *Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое множество формул сигнатуры Σ, $\Delta \subseteq \Sigma$, а $\mathcal{S}_1$ эквивалентно множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, причем $\Delta \subseteq \Sigma_1$. Тогда $\mathcal{S}_1$ является компонентой Δ–разложения $\mathcal{T}$ в том и только в том случае, если выполнено следующее условие:*

(*) для любой формулы φ если $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, $\Sigma_\varphi \subseteq \Sigma$ есть сигнатура φ, $\Sigma_\varphi \cap (\Sigma_1 \setminus \Delta) \neq \varnothing$ и φ Δ–неразложима в $\mathcal{T}$, то имеет место включение $\Sigma_\varphi \subseteq \Sigma_1$.

$\Rightarrow$: Пусть $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle$ — есть Δ–разложение $\mathcal{T}$, где $\mathcal{S}_2$ — множество формул сигнатуры $\Sigma_2 = \Delta \cup (\Sigma \setminus \Sigma_1)$. Пусть φ — такая формула, что $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, $\Sigma_\varphi \subseteq \Sigma$ есть сигнатура φ, $\Sigma_\varphi \cap (\Sigma_1 \setminus \Delta) \neq \varnothing$, φ Δ–неразложима в $\mathcal{T}$, однако $\Sigma_\varphi \nsubseteq \Sigma_1$. Тогда $\Sigma_\varphi \cap (\Sigma_2 \setminus \Delta) \neq \varnothing$ и по лемме 1 из $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ получаем, что формула φ Δ–разложима в $\mathcal{T}$ — противоречие.

$\Leftarrow$: Пусть $\mathcal{S}_2$ эквивалентно множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре $\Sigma_2 = \Delta \cup (\Sigma \setminus \Sigma_1)$. По свойству тавтологий, которым обладает отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$, данное множество не пусто. Более того, можно полагать, что в формулах $\mathcal{S}_2$ (равно как и в формулах множества $\mathcal{S}_1$) используются все символы сигнатуры Δ. Пусть ψ — некоторая формула сигнатуры Σ, выводимая из $\mathcal{T}$. Тогда по лемме 2 найдется последовательность формул $\theta_1, \ldots, \theta_n$, Δ–неразложимых в $\mathcal{T}$, таких, что $\theta_1, \ldots, \theta_n \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Согласно определению 4, для каждой формулы θ_i, $i = 1, .., n$ и подходящего множества формул $\mathcal{S}_j$, $j = 1, 2$ посылка условия $(*)$ тогда выполняется, поэтому сигнатура каждого θ_i содержится либо в Σ_1, либо в Σ_2. По определению множеств $\mathcal{S}_j$, $j = 1, 2$ тогда имеем $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \vdash_{\mathcal{L}} \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ и, в силу транзитивности отношения $\vdash_{\mathcal{L}}$, получаем $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Так как ψ — произвольная формула, выводимая из $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{L}} \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ и $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle$ является Δ–разложением $\mathcal{T}$. $\square$

Завершим доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{T}$ — множество формул сигнатуры Σ, а $\Delta \subseteq \Sigma$ — некоторое подмножество этой сигнатуры. Рассмотрим множество всех подмножеств Σ, которые содержат Δ; обозначим его через Ω. В силу свойства тавтологий, которым обладает отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$, каждому набору сигнатурных символов $\Sigma_1 \in \Omega$ соответствует непустое множество формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре Σ_1. Из леммы 3 следует, что некоторое подмножество $\Sigma_1 \in \Omega$ соответствует компоненте Δ–разложения $\mathcal{T}$, не имеющей нетривиальных Δ–разложений, тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию $(*)$ и не имеет собственного подмножества, удовлетворяющего этому условию. Заметим, что совокупность множеств из Ω, удовлетворяющих условию $(*)$, замкнута относительно пересечений, следовательно, любой символ сигнатуры Σ содержится в единственном минимальном множестве из Ω со свойством $(*)$, причем пересечение этих минимальных множеств совпадает с Δ. Тем самым свойство однозначности сигнатурных разложений доказано. $\square$

Из доказательства теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1 *Пусть отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет интерполяционному свойству Крейга, $\mathcal{T}$ — есть некоторое множество формул сигнатуры Σ и $\Delta \subseteq \Sigma$. Рассмотрим множество Ω всех компонент Δ–разложения $\mathcal{T}$ с отношением $\prec \subseteq \Omega \times \Omega$, определенным следующим образом: для всех $\mathcal{S} \in \Omega$, $\mathcal{U} \in \Omega$ имеем $\mathcal{S} \prec \mathcal{U}$ в том и только том случае, если $\mathcal{S}$ — компонента Δ–разложения $\mathcal{U}$.*

Тогда $(\Omega, \prec)$ — есть булева алгебра, наименьшим элементом которой является множество всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре Δ, а наибольшим — множество всех формул $\mathcal{T}$.

Введем следующее вспомогательное определение:

Определение 5 *Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое множество формул сигнатуры Σ и $\Delta \subseteq \Sigma$. Назовем объединение множеств формул $\bigcup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\}$, эквивалентное $\mathcal{T}$, каноническим Δ–разложением для $\mathcal{T}$, если Π — есть разбиение сигнатуры $\Sigma \setminus \Delta$, а каждое $\mathcal{T}_\pi$ — есть множество формул сигнатуры $\pi \cup \Delta$, эквивалентное множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре $\pi \cup \Delta$, и не имеющее нетривиальных Δ–разложений.*

Укажем для $\vdash_{\mathcal{L}}$ более точно взаимосвязь интерполяционного свойства и свойства однозначности сигнатурных разложений.

Предложение 1 *Отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет интерполяционному свойству Крейга тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойству однозначности сигнатурных разложений и следующему дополнительному свойству:*

(**) Пусть $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ — эквивалентные множества формул сигнатур Σ и $\Sigma' \supseteq \Sigma$ соответственно, $\Delta \subseteq \Sigma$ и множество $\bigcup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\}$ — есть каноническое Δ–разложение для $\mathcal{T}$. Тогда множество $\cup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\} \bigcup \cup\{\mathcal{T}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\}$ — есть каноническое Δ–разложение для $\mathcal{T}'$, причем Υ можно выбрать разбиением сигнатуры $\Sigma' \setminus \Sigma$ на одноэлементные подмножества, а каждое $\mathcal{T}_\varepsilon$ — эквивалентным множеству формул сигнатуры Δ, выводимых из $\mathcal{T}$.

$\Rightarrow$: В силу теоремы 1, достаточно показать, что из интерполяционного свойства вытекает свойство $(**)$. Пусть $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ — эквивалентные множества формул сигнатур Σ и $\Sigma' \supseteq \Sigma$, соответственно, и $\Delta \subseteq \Sigma$. По теореме 1 существует каноническое разложение $\bigcup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\}$ для $\mathcal{T}$, где Π — разбиение сигнатуры $\Sigma \setminus \Delta$.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех следствий формул $\mathcal{T}'$ в сигнатуре $(\Sigma' \setminus \Sigma) \cup \Delta$. Рассмотрим объединение множеств $\bigcup\{\mathcal{P}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\}$, где Υ — разбиение сигнатуры $\Sigma' \setminus \Sigma$ на одноэлементные подмножества, а каждое $\mathcal{P}_\varepsilon$ — есть множество формул сигнатуры $\varepsilon \cup \Delta$, эквивалентное множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в этой сигнатуре. Имеем $\mathcal{P} \vdash_{\mathcal{L}} \bigcup\{\mathcal{P}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\}$. С другой стороны, по интерполяционному свойству для любой формулы φ в сигнатуре $(\Sigma' \setminus \Sigma) \cup \Delta$ из $\mathcal{T}' \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ следует, что существует формула θ в сигнатуре Δ такая, что $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \theta$ и $\theta \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Следовательно, $\mathcal{P} \sim_{\mathcal{L}} \bigcup\{\mathcal{P}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\}$ и каждое $\mathcal{P}_\varepsilon$ эквивалентно множеству всех формул сигнатуры Δ, выводимых из $\mathcal{T}$.

Тогда получаем, что объединение множеств $\cup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\} \bigcup \cup\{\mathcal{P}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\}$ — есть каноническое Δ–разложение для множества формул $\mathcal{T}'$, удовлетворяющее условиям $(**)$.

$\Leftarrow$: Пусть φ и ψ — формулы сигнатур Σ_φ, Σ_ψ такие, что $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Обозначим $\mathcal{T} = \{\varphi\}$, $\mathcal{T}' = \{\varphi, \psi\}$, $\Delta = \Sigma_\varphi \cap \Sigma_\psi$. Тогда $\mathcal{T} \sim_{\mathcal{L}} \mathcal{T}'$.

Пусть $\cup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\}$ — каноническое Δ–разложение для $\mathcal{T}$. Тогда по свойству $(**)$ объединение $\cup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\} \bigcup \cup\{\mathcal{T}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\}$, где Υ — разбиение сигнатуры $\Sigma_\psi \setminus \Delta$ на одноэлементные подмножества, а каждое $\mathcal{T}_\varepsilon$ эквивалентно множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре Δ, есть каноническое Δ–разложение для $\mathcal{T}'$.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ всех следствий формулы φ в сигнатуре Σ_ψ. Пусть $\bigcup\{\mathcal{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — каноническое Δ–разложение для $\mathcal{P}$, где Λ — разбиение сигнатуры $\Sigma_\psi \setminus \Delta$. Тогда $\cup\{\mathcal{T}_\pi \mid \pi \in \Pi\} \bigcup \cup\{\mathcal{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — есть каноническое Δ–разложение для $\mathcal{T}'$, причем $\cup\{\mathcal{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{P}$ и, следовательно, по свойству транзитивности отношения $\vdash_{\mathcal{L}}$, $\cup\{\mathcal{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

Таким образом, мы имеем два канонических Δ–разложения для множества формул $\mathcal{T}'$. По свойству однозначности сигнатурных разложений тогда получаем, что разбиения Υ и Λ сигнатуры $\Sigma_\psi \setminus \Delta$ совпадают, следовательно из определения канонического Δ–разложения $\cup\{\mathcal{T}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\} \sim_{\mathcal{L}} \cup\{\mathcal{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ и значит $\cup\{\mathcal{T}_\varepsilon \mid \varepsilon \in \Upsilon\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. Согласно $(**)$, каждое $\mathcal{T}_\varepsilon$ можно выбрать эквивалентным множеству всех формул, выводимых из $\mathcal{T}$ в сигнатуре Δ, поэтому по свойствам транзитивности, компактности, экстенсиональности и адъюнкции отношения $\vdash_{\mathcal{L}}$ получаем формулу θ сигнатуры Δ такую, что $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \theta$ и $\theta \vdash_{\mathcal{L}} \psi$. $\Box$

Определение 6 *В исчислении $\mathcal{L}$ разрешимо свойство Δ–разложимости, если существует эффективная процедура, которая по любому конечному множеству формул $\mathcal{T}$ конечной сигнатуры Σ и любому заданному подмножеству $\Delta \subseteq \Sigma$ позволяет определить, имеет ли $\mathcal{T}$ нетривиальное Δ–разложение.*

Заметим, что если отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ вычислимо, удовлетворяет свойствам экстенсиональности и компактности и если для заданного конечного множества формул $\mathcal{T}$ конечной сигнатуры Σ и подмножества $\Delta \subseteq \Sigma$ известно, что $\mathcal{T}$ имеет нетривиальное Δ–разложение, то возможно эффективно построить конечные множества формул $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ такие, что $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle$ есть нетривиальное Δ–разложение $\mathcal{T}$.

Предложение 2 *В исчислении $\mathcal{L}$ свойство Δ–разложимости является разрешимым, если отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет свойствам экстенсиональности, транзитивности, адъюнкции и следующим дополнительным условиям:*

- $\vdash_{\mathcal{L}}$ *вычислимо;*
- $\vdash_{\mathcal{L}}$ *удовлетворяет свойству сильных следствий;*
- *существует эффективная процедура для нахождения сильного следствия для любой формулы $\varphi \in \mathcal{L}$ сигнатуры Σ и любого подмножества $\Sigma' \subseteq \Sigma$.*

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое конечное множество формул сигнатуры Σ. Тогда, согласно свойствам экстенсиональности и адъюнкции, множество $\mathcal{T}$ эквивалентно в $\mathcal{L}$ некоторой формуле φ сигнатуры Σ.

Предположим, что для некоторого $\Delta \subseteq \Sigma$ множество формул $\mathcal{T}$ Δ–разложимо с компонентами $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ сигнатур Σ_1, Σ_2. Пусть θ_1, θ_2 — сильные следствия φ в сигнатурах Σ_1 и Σ_2, соответственно. Тогда $\{\theta_i\} \vdash_{\mathcal{L}} \mathcal{S}_i$ для $i = 1, 2$ и по транзитивности отношения $\vdash_{\mathcal{L}}$ имеем $\{\theta_1, \theta_2\} \vdash \mathcal{T}$. С учетом $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \theta_i$, $i = 1, 2$ получаем, что $\mathcal{T}$ Δ–разложима с компонентами $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}$.

Таким образом, множество формул $\mathcal{T}$ имеет нетривиальное Δ–разложение в том и только в том случае, если $\{\varphi\} \sim_{\mathcal{L}} \{\theta_1, \theta_2\}$, где θ_1, θ_2 — сильные следствия φ в некоторых сигнатурах Σ_1, Σ_2 с условием $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Delta$, $\Sigma_1 \neq \Delta \neq \Sigma_2$. В силу вычислимости отношения $\vdash_{\mathcal{L}}$ и эффективности нахождения сильных следствий, получаем разрешимость свойства Δ–разложимости в исчислении $\mathcal{L}$. $\square$

4 Заключение

Необходимо отметить, что ограничения, наложенные на отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$ в разделе 2, являются довольно стандартными и удовлетворяются во многих исчислениях, включая широкий класс модальных логик. Интерполяционное свойство Крейга является одним из важнейших свойств при изучении логик и известно достаточно много примеров исчислений, обладающих данным свойством. С учетом теоремы 1 и заданных ограничений на отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$, можно утверждать, что свойству однозначности сигнатурных разложений, как правило, удовлетворяют те исчисления, для которых доказано интерполяционное свойство. Не указывая подробностей, мы отсылаем читателя к статье [12] и монографии [5], содержащим обобщение результатов по интерполяционным свойствам.

С точки зрения разрешимости, еще более важным для свойства Δ–разложимости является униформное интерполяционное свойство, насчет которого также накоплен значительный объем результатов в модальных [14,6,4] и дескриптивных [8] логиках. Данное свойство влечет интерполяционное свойство Крейга и является обобщением свойства сильных следствий, сформулированного в разделе 2. Использование униформной интерполяции в построении алгоритмов весьма ограничено в силу неприемлемых вычислительных оценок, доказанных для этого свойства в различных исчислениях. Тем не менее, во многих случаях изучение униформной интерполяции позволяет быстро ответить на ряд вопросов, связанных с понятием Δ–разложимости. В силу теоремы 1, предложения 2 и ограничений на отношение $\vdash_{\mathcal{L}}$, указанных в разделе 2, в подавляющем числе известных исчислений, обладающих униформной интерполяцией, имеет место однозначность сигнатурных разложений и алгоритмическая разрешимость свойства Δ–разложимости. Примерами таких исчислений является интуиционистская логика, модальные логики Grz, GL, S5, K и модальное μ-исчисление.

Список литературы

1. E. Amir, S. McIlraith. Partition-based logical reasoning for first-order and propositional theories. *Artificial Intelligence*, 162 (1-2), pp. 49-88, 2005.
2. B. Cuenca Grau, I. Horrocks, Y. Kazakov, U. Sattler. Modular reuse of ontologies: Theory and practice. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 31, pp. 273–318, 2008.

3. B. Cuenca Grau, I. Horrocks, Y. Kazakov, U. Sattler. Extracting modules from ontologies: Theory and practice. *Technical report*, University of Manchester, 2007. Available from http://www.cs.man.ac.uk/∼ykazakov/publications/abstracts/
4. G. D'Agostino, M. Hollenberg. Uniform interpolation, automata, and the modal μ-calculus. *In Proc. of AiML'98*, Vol 1, CSLI Publishers, 1998.
5. D. Gabbay, L. Maksimova. Interpolation and Definability, Volume 1: Modal and Intuitionistic Logic. Oxford University Press, 2005.
6. S. Ghilardi. An algebraic theory of normal forms. *Annals of Pure and Applied Logic*, 71(3), pp. 189-245, 1995.
7. S. Ghilardi, C. Lutz, F. Wolter, M. Zakharyaschev. Conservative Extensions in Modal Logic. *In Proc. of AiML'06.*
8. B. Konev, C. Lutz, D. Walther, F. Wolter. Formal properties of modularization. *In H. Stuckenschmidt C. Parent, S. Spaccapietra, LNCS Volume on Ontology Modularization*, Springer Verlag, 2008.
9. B. Konev, C. Lutz, D. Walther, F. Wolter. Semantic modularity and module extraction in description logic. *In Proc. of ECAI, 2008.*
10. B. Konev, D. Walther, F. Wolter. The logical difference problem for description logic terminologies. *In Proc. of IJCAR, 2008*, LNAI, Springer Verlag.
11. C. Lutz, D. Walther, F. Wolter. Conservative extensions in expressive description logics. *In Proc. of IJCAI 2007*, pp. 453-458, 2007.
12. L. Maksimova. Definability and interpolation in non-classical logics. *Studia Logica*, 82, pp. 271-291, 2006.
13. D. Ponomaryov. A decomposability criterion for elementary theories. *Siberian Mathematical Journal*, 49(1), pp. 152-154, 2008.
14. A. Visser. Uniform interpolation and layered bisimulation. *Lecture Notes in Logic*, 6, pp. 139-164, 1996.