

Научное наследие В.Ф. Турчина и его кибернетические основания математики

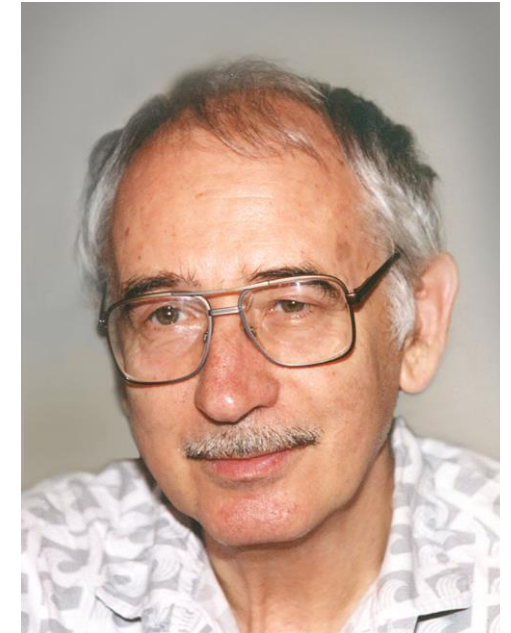
Андрей В. Климов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

V.F. Turchin's Scientific Legacy and his Cybernetic Foundation of Mathematics

Andrei V. Klimov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow



10.04.024

Seminar STEP (Software Engineering, Theory and Experimental Programming)

Valentin Turchin's Trilogy

1. Philosophical part: Cybernetic Philosophy

- Book «The Phenomenon of Science: A Cybernetic Approach to Human Evolution» (1977)
- Cybernetic Epistemology and Ontology (1990s)
- Cybernetic Manifesto (1989)
- Principia Cybernetica Project (1990s)

2. Social part: Application of the philosophy to society

- Book «The Inertia of Fear and the Scientific Worldview» (1981)
- partly in «The Phenomenon of Science»

3. Scientific part: Application of the philosophy to science

- Programming metalanguage Refal (1960s)
- Metacomputation: Supercompilation (1972...)
- Cybernetic Foundations of Mathematics (1983)

Valentin Turchin: «Philosophy can be introduced into minds only by demonstrating its usefulness and productivity, obtaining concrete scientific results»

(the quote is inaccurate, the sense is conveyed from memory)

Трилогия Валентина Турчина

1. Философская часть: Кибернетическая философия

- Книга «Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции» (написана ~1970)
- Кибернетическая эпистемология и онтология
- Кибернетический манифест (1989)
- Проект Principia Cybernetica (1990-ые)

2. Социальная часть: Приложение философии к обществу

- Книга «Инерция страха: Социализм и тоталитаризм» (1977)
- частично в «Феномене науки»

3. Научная часть: Приложения философии к науке

- Метаязык программирования Рефал (1960-е)
- Метавычисления: суперкомпиляция (1972...)
- Кибернетические основания математики (1983)

В.Ф. Турчин: «Философию можно внедрить в умы, только демонстрируя ее полезность и продуктивность, получая конкретные научные результаты»

(цитата неточная, смысл передан по памяти)

Valentin Turchin's Trilogy

1. Philosophical part: Cybernetic Philosophy

- Book «The Phenomenon of Science: A Cybernetic Approach to Human Evolution» (1977)
- Cybernetic Epistemology and Ontology (1990s)
- Cybernetic Manifesto (1989)
- Principia Cybernetica Project (1990s)

2. Social part: Application of the philosophy to society

- Book «The Inertia of Fear and the Scientific Worldview» (1981)
- partly in «The Phenomenon of Science»

3. Scientific part: Application of the philosophy to science

- Programming metalanguage Refal (1960s)
- Metacomputation: Supercompilation (1972...)
- Cybernetic Foundations of Mathematics (1983)

Ср.: Карл Маркс, «Тезисы о Фейербахе»:

11. Философы лишь различным образом *объясняли* мир, но дело заключается в том, чтобы *изменить* его.

Трилогия Валентина Турчина

1. Философская часть: Кибернетическая философия

- Книга «Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции» (написана ~1970)
- Кибернетическая эпистемология и онтология
- Кибернетический манифест (1989)
- Проект Principia Cybernetica (1990-ые)

2. Социальная часть: Приложение философии к обществу

- Книга «Инерция страха: Социализм и тоталитаризм» (1977)
- частично в «Феномене науки»

3. Научная часть: Приложения философии к науке

- Метаязык программирования Рефал (1960-е)
- Метавычисления: суперкомпиляция (1972...)
- Кибернетические основания математики (1983)

В.Ф. Турчин: «Философию можно внедрить в умы, только демонстрируя ее полезность и продуктивность, получая конкретные научные результаты»

(цитата неточная, смысл передан по памяти)

1. Philosophical part: Cybernetic Philosophy

Book «The Phenomenon of Science: A Cybernetic Approach to Human Evolution» (1977)

- Modern scientific philosophy
 - Science as modelling of the world; predictions
- Metasystem transition theory
 - Metasystem transition as a quantum of evolution
 - branching growth of the penultimate level
 - staircase effect
 - ultrametasytem transition
 - (stabilization of pre-penultimate level)
 - Evolution as series of metasystem transitions
 - biological evolution from dead matter to human beings
 - (enigma of emergence of consciousness)
 - evolution of culture
 - evolution of language and thinking
 - evolution of mathematics and science
 - social integration

нет у ВФТ



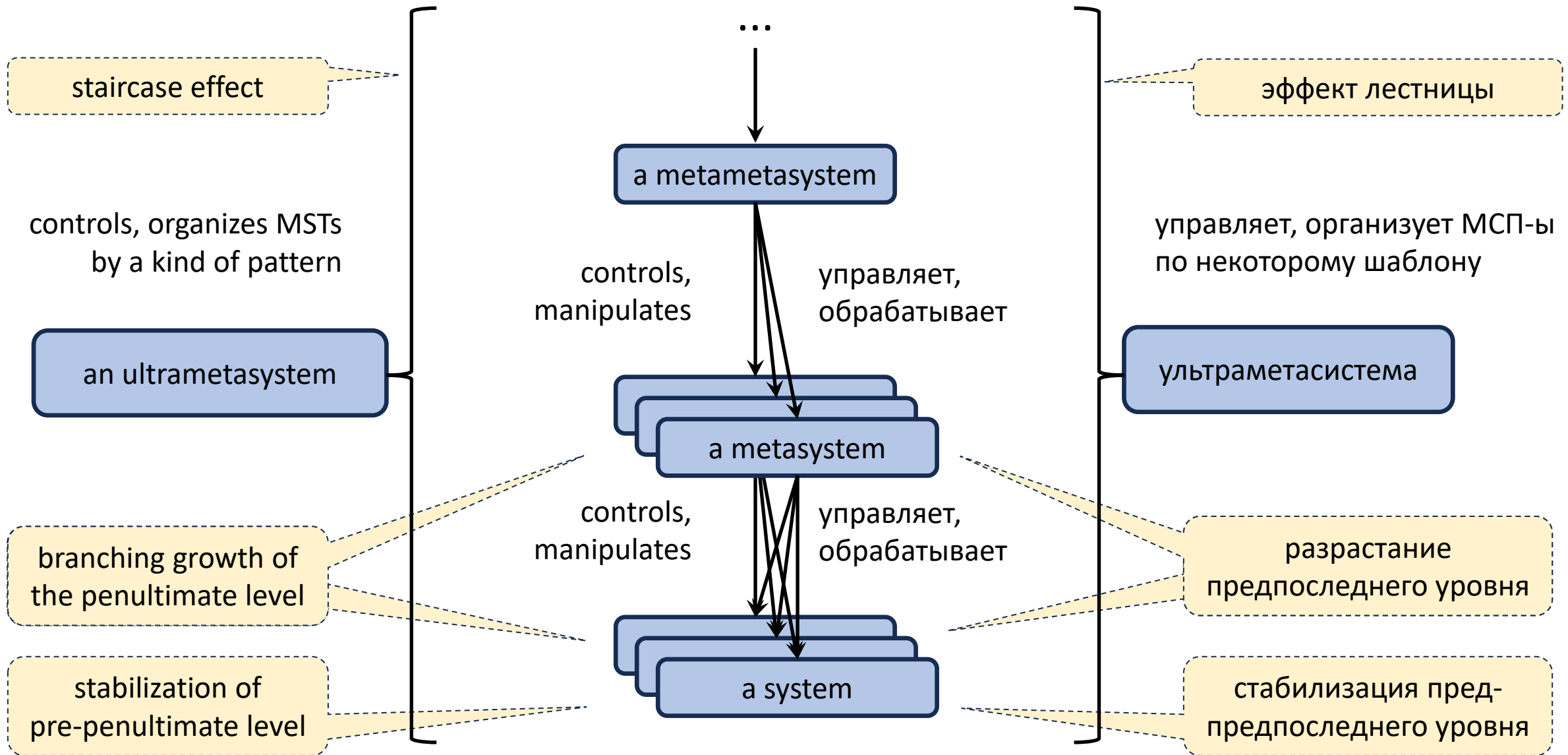
Кибернетическая философия

Книга «Феномен науки: Кибернетический подход к эволюции» (написана ~1970)

- Современная научная философия
 - Наука как моделирование мира; предсказания
- Концепция метасистемного перехода
 - Метасистемный переход как квант эволюции
 - разрастание предпоследнего уровня
 - эффект лестницы
 - ультраметасистемный переход
 - (стабилизация пред-предпоследнего уровня)
 - Эволюция как серия метасистемных переходов
 - биологическая эволюция от мертвой материи до человека
 - (загадка возникновения сознания)
 - эволюция культуры
 - эволюция языка и мышления
 - эволюция математики и науки в целом
 - социальная интеграция

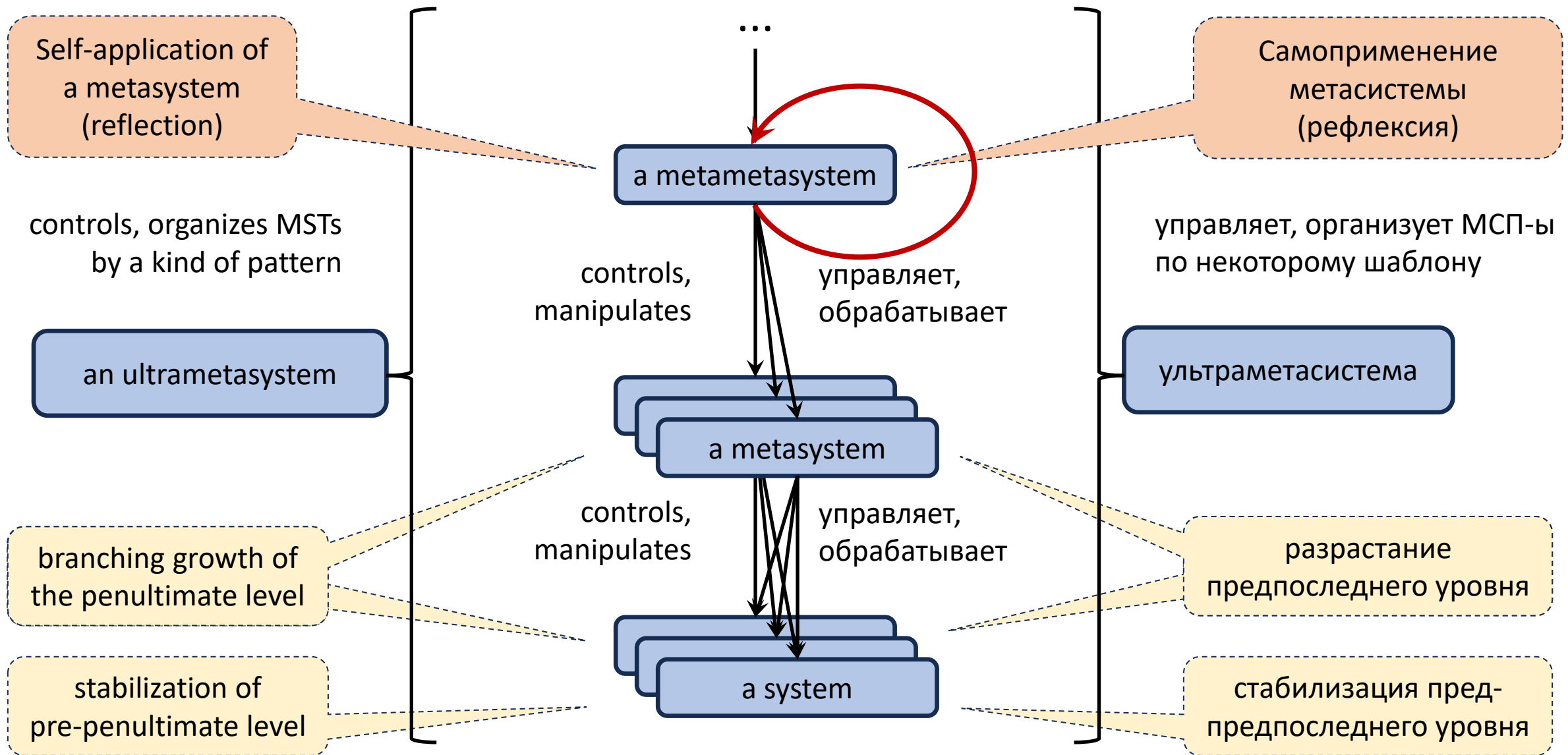
Notion of metasytem transition

Понятие метасистемного перехода



Notion of metasytem transition

Понятие метасистемного перехода



2. Social part: «The Inertia of Fear...»

Общество

- Общество — метасистема над индивидами, культура — над мышлением
 - социальная интеграция людей — это МСП
 - может происходить по-разному
 - эволюция разнообразия способов интеграции
 - «правильный» МСП: метасистема сохраняет и использует свойства подсистем, но не подавляет их
 - основное свойство человека — свободная воля, свобода принятия решений
 - (в том числе о самих себе! — *Борис Шапиро*)
 - мировое сообщество, «глобализация»
- Этапы эволюции общества по Турчину
 - каков основной механизм принуждения индивидов для интеграции в общество?
 - физическое принуждение: *рабовладение*
 - экономическое принуждение: *капитализм*
 - идеологическое принуждение: *социализм*
 - тоталитаризм — «неудачная попытка» идеологической интеграции
- Исторический идеализм Турчина vs. исторический материализм Маркса
 - что управляет историей? — идеи или экономика?



Социальная часть: «Инерция страха...»

Личность

- Высшие ценности
 - сверхличные; более сильные, чем воля к жизни
 - что есть Добро и Зло
 - смысл жизни
 - свободный выбор высших ценностей и смысла жизни
 - «Проблема высших ценностей — это центральная проблема нынешнего общества» — из «Кибернетического манифеста»
- Бессмертие
 - метафизическое бессмертие: загробная жизнь
 - творческое бессмертие: вклад в эволюцию человечества
 - кибернетическое бессмертие: смена «материала»
 - человеческие сверхсущества: физическая интеграция индивидуальных нервных систем с созданием потенциально бессмертных человеческих сверхсуществ (мн. ч.!)
 - добровольность интеграции в сверхсущества

2. Social part: «The Inertia of Fear...»

Социальная часть: «Инерция страха...»

Общество

- Общество над мышлением
 - социализм
 - может быть
 - эволюция
 - «правильное» исполнение
 - осознание
 - (в)
 - мировое общество, интеллигентность
- Этапы эволюции общества по Турчину
 - каков основной механизм принуждения индивидов для интеграции в общество?
 - физическое принуждение: *рабовладение*
 - экономическое принуждение: *капитализм*
 - идеологическое принуждение: *социализм*
 - тоталитаризм — «неудачная попытка» идеологической интеграции
- Исторический идеализм Турчина vs. исторический материализм Маркса
 - что управляет историей? – идеи или экономика?

Личность

Из «Кибернетического манифеста»:

Смертность многоклеточных организмов эволюционно необходима. В эру разума, когда ведущей ветвью эволюции является эволюция человеческого общества, источником эволюции становится человеческий мозг. Он не объект, а субъект экспериментирования, его потеря при умирании есть эволюционная нелепость.

Личность должна быть бессмертной, как бессмертны гены. Бессмертие человеческой личности стоит на повестке дня Космической Эволюции.

• Бессмертие

- метафизическое бессмертие: загробная жизнь
- творческое бессмертие: вклад в эволюцию человечества
- кибернетическое бессмертие: смена «материала»
- человеческие сверхсущества: физическая интеграция индивидуальных нервных систем с созданием потенциально бессмертных человеческих сверхсуществ (мн. ч.!)
- добровольность интеграции в сверхсущества



ЖИЗНИ

МЫСЛА

ТРАЛЬНАЯ

3. Scientific part: Cybernetic Foundation of Mathematics

Sources

1. Full text: a draft of a book (more motivations)
 - **The Cybernetic Foundation of Mathematics.** Technical report, The City College of the City University of New York (1983)
2. Abridged two-part: a draft of a paper (most readable)
 - **The Cybernetic Foundation of Mathematics. I. The Concept of Truth** (1983)
 - **The Cybernetic Foundation of Mathematics. II. Interpretation of Set Theory** (1983)
3. Published paper: a more abridged (less readable)
 - **A constructive interpretation of the full set theory.** The Journal of Symbolic Logic 52(1), 172–201 (1987)

The PDF and DJVU files of [1,2] can be downloaded from

- <https://pat.keldysh.ru/~roman/doc/Turchin/>

Vladimir Balter (mathematician from Ufa) has translated into Russian and prepared Word files of English texts

Научная часть: Кибернетические основания математики

Источники

1. Полный текст: рукопись книги (больше мотивировок)
 - **Кибернетические основания математики.** Технический отчет, Городской колледж Городского университета Нью-Йорка (1983)
2. Сокращенная в двух частях: черновик статьи предполагалось опубликовать (наиболее читабельная)
 - **Кибернетические основания математики. I. Понятие истины** (1983)
 - **Кибернетические основания математики. II. Интерпретация теории множеств** (1983)
3. Статья: сильно сжатая (менее читабельная)
 - **Конструктивная интерпретация полной теории множества.** J. of Symbolic Logic 52(1), 172–201 (1987)

PDF и DJVU файлы [1,2] (сканы на английском) доступны

- <https://pat.keldysh.ru/~roman/doc/Turchin/>

Владимир Балтер (математик из Уфы) перевел на русский и подготовил Word-файлы английского текста

The foundational crisis in mathematics

- We get used to Set Theory as Foundation of Mathematics
 - Thanks to studying math. analysis in universities
 - Believe to metamathematicians that it is well grounded
 - **Denotational semantics** is the most used method for describing programming languages
- At the beginning of the XX century paradoxes shook the (naive) set theory and logic (notice **reflection**)
 - Logical: **Liar's paradox**
“This statement is false”
 - Set-theoretical: **Russell's paradox** (1901)
Let $R = \{ x \mid x \notin x \}$, then $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$
- Mainstream solution to problems concerning paradoxes
 - To **restrict** mathematical languages and notions
 - Russel's theory of types (1902–1908)
 - Formal axiomatic approach (Hilbert et al.)
 - A **minimal set of axioms** sufficient for everyday use
 - Classic logic
 - Zermelo–Fraenkel axiomatic set theory
 - Treatise by Nicolas Bourbaki (1935–1968)
 - Mathematical **potentialism**
 - The world of sets is **gradually growing**

Кризис оснований математики

- Мы привыкли к теории множеств как основаниями мат-ки
 - Благодаря обучению мат-анализу в университетах
 - Верим метаматематикам, что ТМ хорошо обоснована
 - Денотационная семантика — наиболее используемый метод при описании языков программирования
- В начале XX века парадоксы сотрясли (наивную) теорию множеств и логику (обратим внимание на **рефлексию**)
 - Логический: **парадокс лжеца**
«Это утверждение ложно»
 - Теоретико-множественный: **парадокс Рассела** (1901)
Пусть $R = \{ x \mid x \notin x \}$, тогда $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$
- Основные подходы к решению проблем парадоксов
 - **Ограничить** математические языки и понятия
 - Теория типов Рассела (1902–1908)
 - Формально-аксиоматический подход (Hilbert и др.)
 - **Минимальная система аксиом**, достаточная для жизни
 - Классическая логика
 - Аксиоматическая теория мн-в Цермело –Френкеля
 - Трактат Никола Бурбаки (1935–1968)
 - Математический **потенциализм**
 - Мир множеств **постепенно растет**

What are we not satisfied with?

- Among the various criticisms of modern mathematics, note
 - **absence of mathematical objects**
 - we deal with only **symbols of variables** and constants
- **Mathematic theories with explicit objects**
 - intuitionism, constructivism: Luitzen E.J. Brouwer
 - constructive mathematics: Andrey Markov
 - constructive analysis: Errett Bishop
 - mathematical objects are equated with **algorithms**
- **Samples**
 - a **real number** is an algorithm producing digits in a positional number system
 - a **function** of real numbers is an algorithm consuming digits of arguments and producing digits of the result
 - a **set** is an algorithm producing (representations of) its elements one by one potentially indefinitely
- **The problem: such mathematics is very restrictive**
 - due to **algorithmic insolvability** of the halting problem (notice **reflection**)
 - mathematicians invent and like many math objects that are **unrepresentable as algorithms**

Чем мы не удовлетворены?

- Среди многих критик современной математики отметим
 - **отсутствие математических объектов**
 - работаем только с **символами переменных** и констант
- **Математические теории с явными объектами**
 - интуиционизм, конструктивизм: Лёйтзен Э.Я. Брауэр
 - конструктивная рекурсивная мат-ка: Андрей Марков
 - конструктивный анализ: Эрретт Бишоп
 - математические объекты — это **алгоритмы**
- **Примеры**
 - **действительное число** — это алгоритм, порождающий цифры в позиционной системе счисления
 - **функция** на действительных числах — это алгоритм, последовательно принимающий цифры аргумента и выдающий цифры результата
 - **множество** — это алгоритм, последовательно порождающий представления элементов
- **Проблема: такая математика весьма ограничена**
 - из-за алгоритмической неразрешимости проблемы останова (отметим **рефлексию**)
 - математики изобретают и любят математические объекты, **непредставимые в виде алгоритмов**

The main idea of CFM

- Turchin agrees with the initial idea of constructive analysis
 - algorithms, programs, processes are the material to represent mathematical objects
- He **extended** the notion of an algorithm so that
 - all mathematical objects can be represented as processes
- He introduced into mathematics
 - **model of a mathematician** =
 - **ideal user** of mathematical machinery =
 - **observer** and active agent (like in modern physics)
- Terminology
 - **mechanical** process = algorithm
 - **metamechanical** process = algorithm + access to the ideal user knowledge
- What is the main problem he have solved?
 - Real mathematicians and the “ideal user” in CFM behave **indeterministically** (a model of “free will”)
 - while **determinism** is an inherent feature of math
 - How to produce deterministic mathematical results when a “mathematician” is “inside”?
 - How to **interpret** the **deterministic** mathematics using possibly **indeterministic** processes, and Zermelo–Fraenkel set theory in particular?

Основная идея КОМ

- Турчин согласен с исходной идеей конструктивного анализа
 - алгоритмы, программы, процессы являются материалом представления математических объектов
- Он **расширил** понятие алгоритма таким образом, что
 - все математические объекты представимы процессами
- Он ввел в математику
 - **модель математика** =
 - **идеального пользователя** математического аппарата =
 - **наблюдателя** и активного агента (ср. с физикой)
- Терминология
 - **механический** процесс = алгоритм
 - **метамеханический** процесс = алгоритм + доступ к знаниям идеального пользователя
- Какую главную проблему он решил?
 - Живые математики и идеальный пользователь в КОМ ведут себя **недетерминированно** (ср. свободная воля)
 - но **детерминизм** — неотъемлемая черта математики
 - Как получить детерминированные математические результаты, когда «математик» есть «внутри теории»?
 - Как **интерпретировать детерминированную** математику потенциально недетерминированными процессами, и теорию множеств Цермело–Френкеля в частности?

Are there origins of “observer” in common mathematics?

- **Incompleteness theorems**
 - an “observer” inside a theory can’t notice the incompleteness of “his world”
 - an “external observer” proves incompleteness
- Consider the **Law of the Excluded Middle: A or not A**
 - classic mathematicians **accept** it as an axiom
 - intuitionistic logicians does **not** accept it
- **Who are right? – Nobody.** These are different observers:
 - an observer “inside” a classic theory can’t notice when **A or not A** does not hold
 - an “external observer” can see when it does not hold (=incompleteness)

Проявляется ли идея «наблюдателя» в обычной математике

- Теоремы о неполноте
 - «наблюдатель» внутри теории не может заметить неполноту «своего мира»
 - «внешний наблюдатель» доказывает неполноту
- Рассмотрим **Закон исключенного третьего: A или не A**
 - классические математики **принимают** его как аксиому
 - логики-интуиционисты его **не** принимают
- **Кто прав? – Никто.** Это разные наблюдатели:
 - наблюдатель «внутри» классической теории не может заметить, когда не выполняется **A или не A**
 - “внешний наблюдатель” может увидеть, когда это не выполняется (=неполнота).

CFM Machinery

- Take a functional programming language (e.g. Refal)
- All processes and the ideal user “lives” in the **single universal time** (cf. *oracles*, which “live” in different “times”)
- Two kinds of processes
 - a **search** is run to know whether it **terminates**
 - a **generator** is a process that gradually **produce a sequence** of terms $[P_1, P_2, \dots]$ (Haskell notation for a list)
- Elementary statements — **predictions** that can be confirmed or falsified (one side only! — cf. *semipredicates*)
 - $P!$ — a process P terminates at some moment
 - $P?$ — a process P never terminates
- We (at the metalevel) prescribe truth values T and F to predictions and to generators of predictions (all are true)
- **User knowledge: two generators**
 - Γ (gnosis) — statements known or predicted to be true
 - Λ — terms representing all already constructed sets
 - **cognitive functions** $\gamma(P)$ and $\bar{\gamma}(P)$ search Γ to infer that P is implied by Γ or contradicts Γ
 - Terms are put in Γ and Λ by some **consistency rules**

Устройство КОМ

- Возьмем функциональный язык программирования (например, Рефал, как это делает Турчин)
- Все процессы и идеальный пользователь «живут» в **едином универсальном времени** (ср. с оракулами)
- Два типа процессов
 - **поиск** выполняется, чтобы узнать, **завершается ли он**
 - **генератор** - это процесс, который постепенно **генерирует последовательность** термов $[P_1, P_2, \dots]$
- Элементарные утверждения — **предсказания**, которые могут быть подтверждены или опровергнуты
 - $P!$ — процесс P когда-то завершится
 - $P?$ — процесс P никогда не завершается
- Мы (на метауровне) приписываем значения истинности T и F предсказаниям и генераторам предсказаний (все T)
- **Знания пользователя: два генератора**
 - Γ (gnosis) — утверждения, которые, как известно, или по прогнозам, являются истинными
 - Λ — термы, представляющие уже построенные мн-ва
 - **когнитивные функции** $\gamma(P)$ и $\bar{\gamma}(P)$ делают поиск в Γ , выясняя, выводится ли P из Γ или противоречит Γ
 - Термы помещаются в Γ и Λ по некоторым **правилам согласованности**

The notion of the ideal user

- We distinguish between
 - a **real user**: a trajectory with backtracking on “errors” — contradictions: $P!$ and $P?$
 - an **ideal user**: a trajectory without backtracking
- Naive questions
 - Does an ideal user exist?
 - Do many ideal users exist or only one?
- Turchin’s interpretation of classic mathematics (namely ZF set theory) relies on the **existence of an ideal user**
- Naive questions
 - If the ideal user does not exist, does it mean ZF is contradictory?
 - If the ZF theory is contradictory, does it mean the ideal user does not exist?

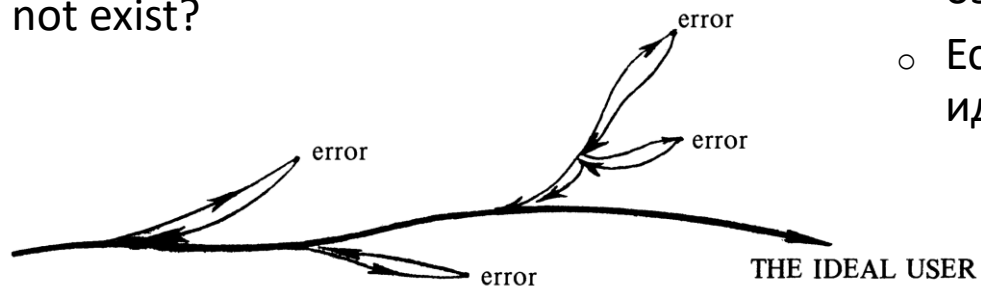


FIGURE 1. The path of knowledge

Понятие идеального пользователя

- Мы различаем
 - **реального пользователя**: траекторию с возвратами при «ошибках» — противоречиях: $P!$ and $P?$
 - **идеального пользователя**: траекторию без возвратов
- Наивные вопросы
 - Существует ли идеальный пользователь?
 - Существует ли много идеальных пользователей или только один?
- Эта интерпретация классической математики (теории множеств ZF) опирается на **существование идеального пользователя**
- Наивные вопросы
 - Если идеального пользователя не существует, означает ли это, что ZF противоречива?
 - Если теория ZF противоречива, означает ли это, что идеального пользователя не существует?

CFM formalization of logics

- $and(A, B) = [A, B]$ – a generator producing a sequence of two predictions
- $or(A, B)$ – a search that terminates when either A or B is found in the knowledge Γ
- $not(A)$ – a search that terminates when the opposite to A is found in the knowledge Γ

Let X be a generator producing $[x_1, x_2, x_3, \dots]$

- for each x in $X : P(x)$ – a generator of predictions producing $[P(x_1), P(x_2), \dots]$
- there exists x in $X : P(x)$ – a search for $P(x_i)$ in the knowledge Γ

Формализация понятий логики в КОМ

- $and(A, B) = [A, B]$ – генератор, порождающий последовательность из двух предсказаний
- $or(A, B)$ – поиск, завершающийся, когда A или B найдено в знаниях Γ
- $not(A)$ – поиска, завершающийся, когда противоположное к A найдено в знаниях Γ

Путь X – генератор, порождающий $[x_1, x_2, x_3, \dots]$

- for each x in $X : P(x)$ – генератор предсказаний, порождающий $[P(x_1), P(x_2), \dots]$
- there exists x in $X : P(x)$ – поиск $P(x_i)$ в знаниях Γ

Interpretability

- The language of CFM allows us to define a process, for which it can't be deterministically concluded whether it terminates or not
 - which of $P!$ or $P?$ is true to put into the knowledge
 - both can be confirmed, or both can be falsified
- E.g., processes with the following semantics
 - Paradox of knight
 - $\text{knight}() = \text{if "I terminate" then stop else knight}()$
 - process $\text{knight}()$ may be considered either terminating or not
 - Paradox of liar
 - $\text{liar}() = \text{if "I do not terminate" then stop else liar}()$
 - process $\text{liar}()$ can be considered neither terminating nor indefinite
- For interpretation of deterministic mathematics, we need to define only such processes that **definitely terminate or not** (despite the user behavior) and we can prescribe truth values T и F to predictions about them
 - Such processes are referred to as **interpretable**

Интерпретируемость

- Язык КОМ позволяет определять процессы, про которые невозможно однозначно выяснить, завершаются ли они
- какой из $P!$ и $P?$ верен, чтобы добавить его в знания
 - оба будут подтверждены или оба опровергнуты
- Например, процессы со следующей семантикой
 - Парадокс рыцаря
 - $\text{knight}() = \text{if «я завершусь» then stop else knight}()$
 - процесс $\text{knight}()$ можно считать завершающимся или незавершающимся
 - Парадокс лжеца
 - $\text{liar}() = \text{if «я не завершусь» then stop else liar}()$
 - процесс $\text{liar}()$ нельзя считать ни завершающимся, ни не завершающимся
- Для интерпретации детерминированной математики мы должны определять только такие процессы, которые **заведомо завершаются или нет** (независимо от поведения пользователя) и мы можем приписать предсказаниям о них значения истинности T и F
 - Такие процессы называются **интерпретируемыми**

Objective interpretability

- The notion of **interpretability** is defined at the metalevel
 - For us who prove that termination of each process we define, does not depend on the user
 - for all process definitions interpreting ZF axioms
 - Inside processes there is no operation to check interpretability
 - Notice that such defined notion of interpretability is **extensional**, and it is not clear how to use it
- **Objective interpretability** is defined intentionally — inductively on the structure of the process trace
 - A **mechanical** process (an ordinary algorithm) is objectively interpretable
 - A **metamechanical** process A calls cognitive functions $\gamma(P)$ and $\bar{\gamma}(P)$ that access the knowledge Γ . If in each such call in the trace of A prediction P is objectively interpretable, then process A itself is objectively interpretable as well
- Some technical details are omitted. Hope this is sufficient to catch the idea

Объективная интерпретируемость

- **Интерпретируемость** определяется на метауровне
 - Для нас, которые доказывают про каждый определяемый процесс, что его завершаемость не зависит от пользователя
 - для процессов, интерпретирующих аксиомы ZF
 - Внутри процессов, нет операции проверки интерпретируемости
 - Такое понятие интерпретируемости является **экстенциональным**, и неясно, как его использовать
- **Объективная интерпретируемость** определяется интенционально — индуктивно по трассам процессов
 - **Механический** процесс (обычный алгоритм) объективно интерпретируем
 - **Метамеханический** процесс A вызывает когнитивные функции $\gamma(P)$ и $\bar{\gamma}(P)$, которые обращаются к знаниям Γ . Если в каждом таком вызове в трассе процесса A предсказание P объективно интерпретируемо, то сам процесс A также объективно интерпретируемый
- Некоторые технические детали опущены

Interpretation of Zermelo–Fraenkel Set Theory

- The main V. Turchin's goal is to demonstrate a new method of mathematical thinking in constructive style
 - Its goal is not to replace the current mathematical foundation without change of the building
 - Rather, to allow us to see and construct new kinds formal linguistic models
- The first step is to demonstrate that the method is complete enough, and this done by him
 - can serve as a foundation of the existing mathematics
- The essence of the ZF set theory interpretation in CFM
 - Almost all ZF axioms has the following form: “there exist a set such that ...”
 - A set is a generator of its elements
 - For each ZF axiom the respective generator is given
 - For each one its objective interpretability is proved
 - V.F. Turchin did not give a full proof of objective interpretability for the axiom of replacement
 - only when the function is explicitly given
 - an open problem

Интерпретация теории множеств Цермело–Френкеля

- Основная цель В. Турчина — продемонстрировать новый метод математического мышления в конструктивном стиле
 - Цель не в том, чтобы заменить нынешний математический фундамент без изменения здания
 - А в том, чтобы строить новые классы формальных языковых моделей
- Первым шагом является демонстрация того, что метод является достаточно полными, и это им сделано
 - может служить основой существующей математики
- Суть интерпретации теории множеств ZF в КОМ
 - Почти все аксиомы ZF имеют следующий вид: «Существует множество, такое, что...»
 - Множество — это генератор своих элементов
 - Для каждой аксиомы ZF задаем соответствующий генератор
 - Для каждого из них доказываем его объективную интерпретируемость
 - В.Ф. Турчин не доказал полностью интерпретируемость аксиомы замены
 - только в случае, когда функция явно задана
 - это открытая проблема

Open problems and future work

- Complete the interpretation of ZF set theory
 - Prove objective interpretability of the generator for the axiom of replacement
 - Hint: current notion of objective interpretability may not work for it
- Formalize the Turchin's style of proving objective interpretability (in any formalism)
 - automate proving objective interpretability in a proof assistant
- Give analogies interpretations to some other mathematical theories
- Apply (and further develop) metacomputation methods for analysis of metamechanical process definitions
 - this should be needed in the above proof assistant
- Use the methods of derivation of truths (predictions) about processes in metacomputation methods
 - cross-fertilization of CFM and metacomputation
- Publish CFM in English and in Russian (with comments)
 - Thanks to Vladimir Balter

Проблемы и темы на будущее

- Завершить интерпретацию теории множеств ZF
 - доказать объективную интерпретируемость генератора для аксиомы замены
 - Возможно: нынешнее понятие объективной интерпретируемости может не годиться для нее
- Формализовать стиль доказательств объективной интерпретируемости Турчина (в любом формализме)
 - автоматизировать доказательство объективной интерпретируемости в proof assistant
- Дать аналогичную интерпретацию некоторым другим математическим теориям
- Применять (и развивать) методы метавычислений для анализа определений метамеханических процессов
 - потребуется в упомянутом proof assistant
- Использовать методы вывода истинности предсказаний в КОМ в методах метавычислений
 - для взаимного обогащения КОМ и метавычислений
- Опубликовать КОМ на английском и русском языках
 - С благодарностью Владимиру Балтеру

Two ways of using mathematics in computer science

Source:

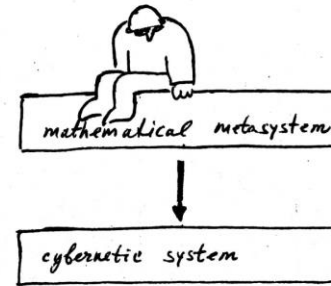
Refal: a Language for Linguistic Cybernetics

Technical Report

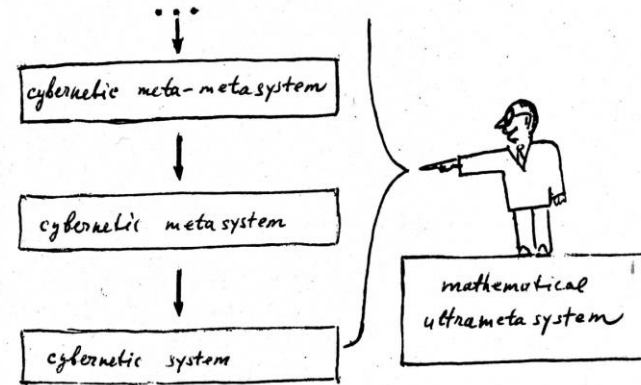
The City College, City University of New York

1986

Два способа использования математики в информатике



(a)



(b)

Fig. Two ways of using mathematics in computer science.