

Исследование взаимосвязей
семантик и эквивалентностей
непрерывно-временных сетей Петри
со слабой временной стратегией (НВСП_{сл})

Зубарев А.Ю.

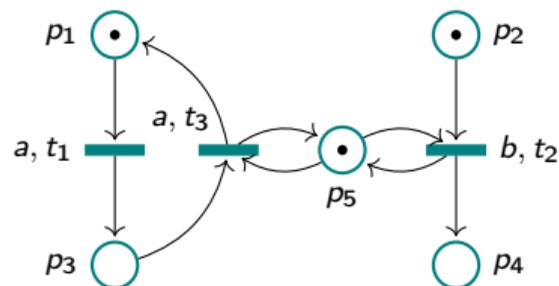
Институт систем информатики, СО РАН

Новосибирск, 2024

План доклада

- 1 Основные понятия
- 2 Метод дискретизации пространства состояний $\text{НВСП}_{\text{сл}}$
- 3 Семантические модели $\text{НВСП}_{\text{сл}}$
- 4 Эквивалентности $\text{НВСП}_{\text{сл}}$
- 5 Заключение

Сети Петри



Сеть Петри (СП) – набор $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$, где

- T – конечное множество переходов (барьеры);
- P – конечное множество мест (окружности), $P \cap T = \emptyset$;
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – отношение инцидентности;
- $M_0 \subseteq P$ – начальная разметка, $M_0 \neq \emptyset$;
- $L : T \rightarrow Act$ – помечающая функция, Act – множество действий;

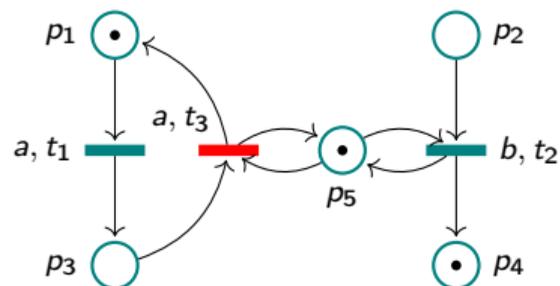
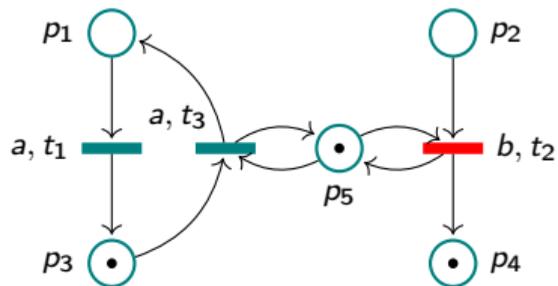
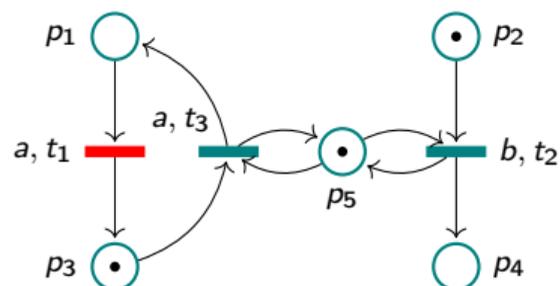
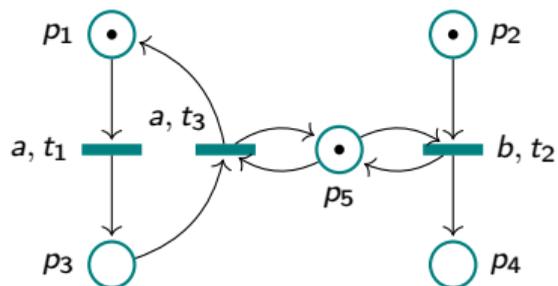
Состояние СП – разметка (множество мест с фишками).

Переход t **допустим в разметке** M , если $\bullet t \subseteq M$.

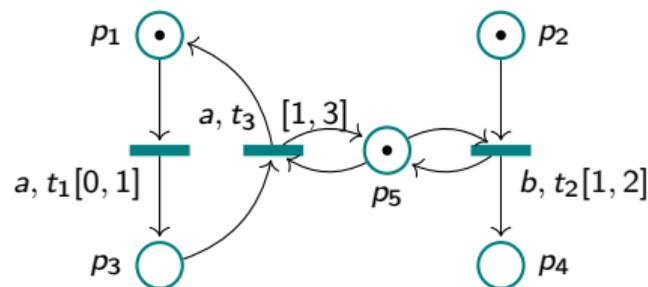
Срабатывание допустимого перехода t в разметке M приводит к новой разметке $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t \bullet$.

$\bullet x, x \bullet$ соответственно множества входных и выходных элементов для элемента $x \in P \cup T$.

Сети Петри | Пример



Непрерывно-временные сети Петри



Непрерывно-временная сеть Петри (НВСП) — пара $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$, где

- $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$ — базовая сеть Петри;
- D — функция, сопоставляющая каждому переходу $t \in T$ временной интервал $[a, b]$ или $[a, b)$, где $a \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $b \in (\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$ и $a \leq b$.

Состояние НВСП — пара (M, I) , где M — разметка, I — функция показаний локальных часов допустимых переходов. Существует два типа изменения состояния:

- **ход времени** (увеличение часов допустимых переходов);
- **срабатывание перехода** (смена разметки и сброс часов некоторых переходов).

Пространство состояний НВСП в общем случае бесконечно и несчетно, что увеличивает сложность анализа модели.

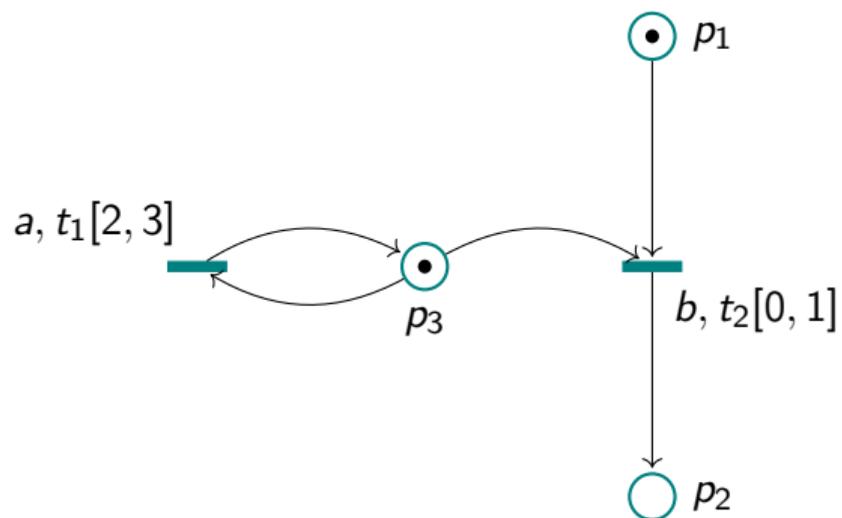
Временные стратегии НВСП

- При **сильной временной стратегии** допустимый переход обязательно должен сработать в границах его временного интервала.
- При **слабой временной стратегии** ход времени не форсирует срабатывание перехода, поэтому переход вообще может не сработать в процессе функционирования НВСП.

Сильная стратегия считается классической и хорошо изучена, тогда как слабая стратегия была предложена недавно и требует исследований.

Пусть $\text{НВСП}_{\text{сл}}$ обозначает НВСП со слабой временной стратегией.

Временные стратегии НВСП | Пример



Стратегии сброса часов НВСП

Определяют необходимость сброса локальных часов допустимого перехода t' при срабатывании перехода t .

Промежуточная стратегия

Часы перехода t' сбрасываются, если t' не являлся допустимым в промежуточной разметке после удаления и до создания фишек переходом t .

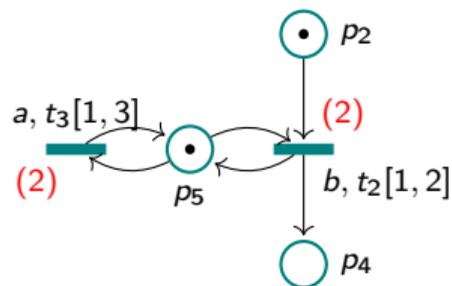
Атомарная стратегия

Часы перехода t сбрасываются, если t' не являлся допустимым в разметке до срабатывания перехода t .

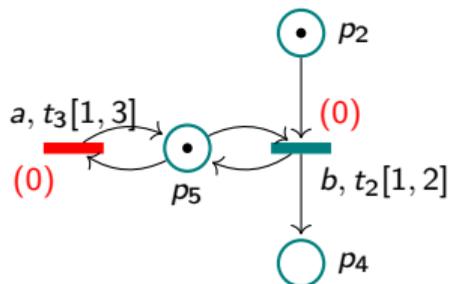
Эти стратегии не изучены для НВСПсл.

Стратегии сброса часов НВСП | Пример

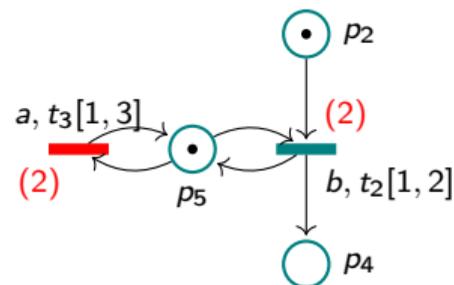
НВСП:



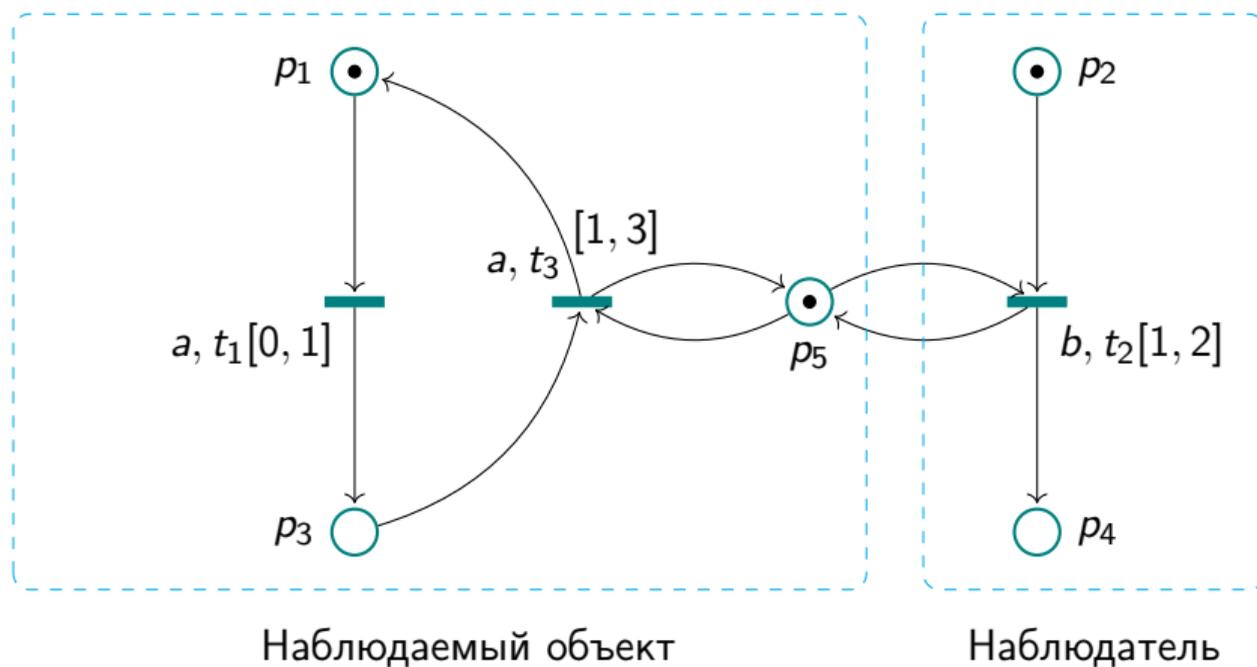
Промежуточная стратегия:



Атомарная стратегия:



Сравнение стратегий НВСП



Сравнение стратегий НВСП

- Известно, что сильная и слабая временные стратегии являются несравнимыми по своей выразительности.
Boyer, M. and Roux, O.H., 2008. On the compared expressiveness of arc, place and transition time Petri nets.
- Для сильных НВСП атомарная стратегия более выразительна.
Bérard, B., Cassez, F., Haddad, S., Lime, D. and Roux, O.H., 2005. Comparison of different semantics for time Petri nets.
- Для слабых НВСП промежуточная стратегия не является более выразительной, чем атомарная. Проблемы достижимости и ограниченности неразрешимы для НВСП с сильной временной и любой стратегией сброса часов, тогда как эти проблемы разрешимы в случае НВСП_{сл} с промежуточной стратегией сброса часов.
Reynier, P.A. and Sangnier, A., 2009. Weak time Petri nets strike back!

Цели и задачи представляемой работы

Главными целями моей работы являются разработка и исследование семантик и поведенческих эквивалентностей для моделей НВСП_{сл} с промежуточной и атомарной стратегиями сброса часов.

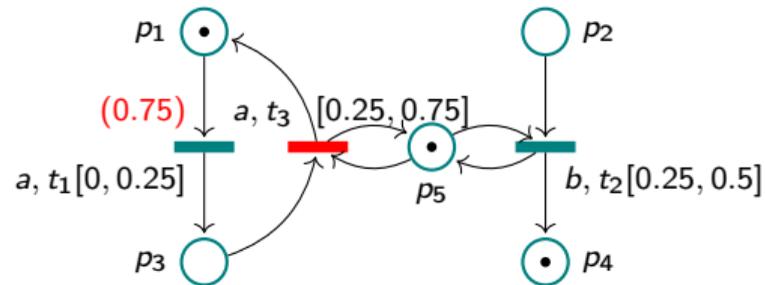
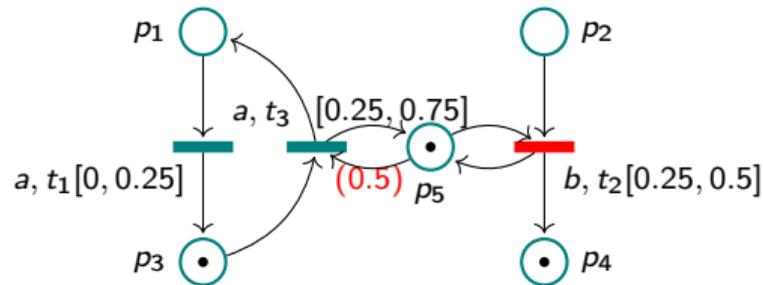
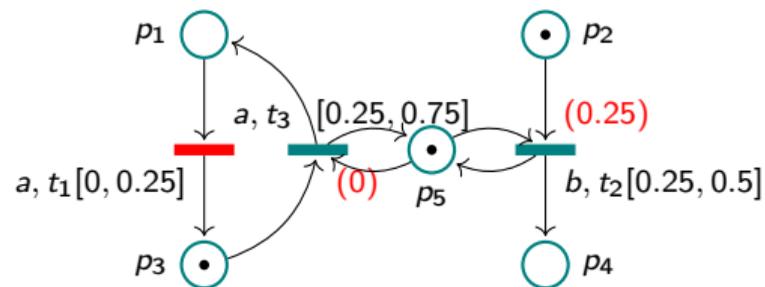
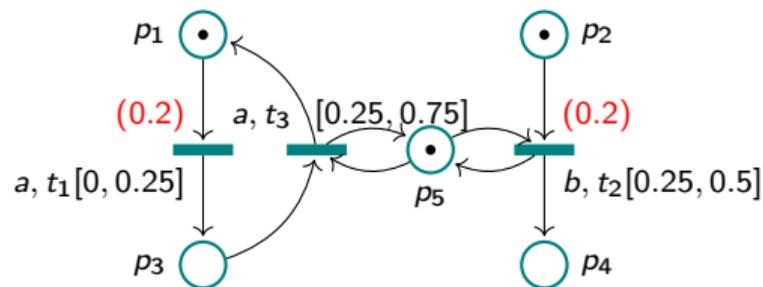
Для моделей НВСП_{сл} были поставлены следующие задачи:

- (1) разработка метода редукции пространства состояний данных моделей с целью упрощения анализа их поведения;
- (2) построение семантики 'истинного' параллелизма в терминах временных процессов;
- (3) определение поведенческих эквивалентностей и построение иерархий их взаимосвязей.

Метод дискретизации пространства состояний $\text{НВСП}_{\text{сл}}$

Пробег НВСП_{сл}

Пробег НВСП_{сл} — последовательность смены состояний посредством хода времени и срабатываний переходов. $S_0 \xrightarrow{0.2} \tilde{S}_0 \xrightarrow{t_1} S_1 \xrightarrow{0} \tilde{S}_1 \xrightarrow{t_2} S_2 \xrightarrow{0.5} \tilde{S}_2 \xrightarrow{t_3} S_3 \xrightarrow{0.75} \tilde{S}_3$



Временная эквивалентность

НВСП_{сл} $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ эквивалентна по времени НВСП_{сл} $\mathcal{TN}' = (\mathcal{N}, D')$, если границы интервала $D(t)$ пропорциональны границам интервала $D'(t)$ с **константой пропорциональности** $c \neq 0$ для каждого перехода t из \mathcal{N} .

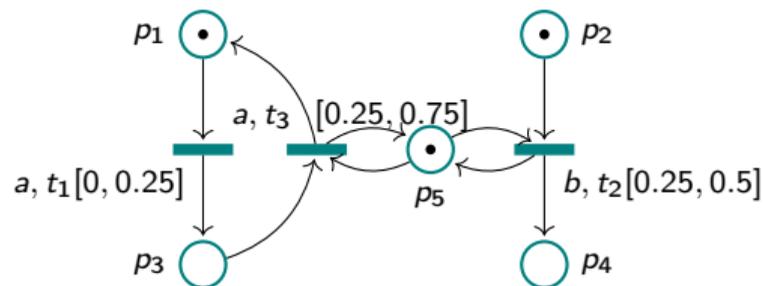
Утверждение 1

Если НВСП_{сл} \mathcal{TN} эквивалентна по времени \mathcal{TN}' с константой пропорциональности c , то для любого пробега \mathcal{TN} существует пробег в \mathcal{TN}' с той же последовательностью срабатываний переходов и временными значениями, умноженными на c .

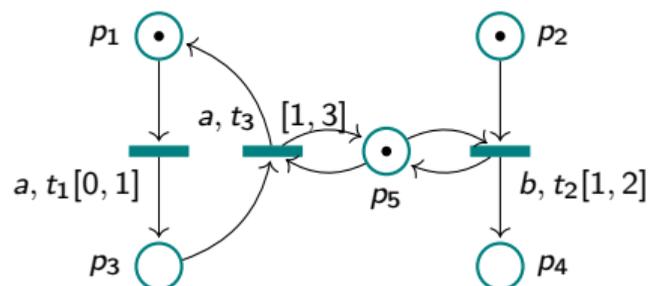
Утверждение 2

Для любой НВСП_{сл} \mathcal{TN} существует эквивалентная по времени \mathcal{TN}' с целочисленными границами временных интервалов.

Временная эквивалентность | Пример

 \mathcal{TN} :

$$\sigma = 0.2 \quad t_1 \ 0 \quad t_2 \ 0.5 \quad t_3 \ 0.75$$

 \mathcal{TN}' :

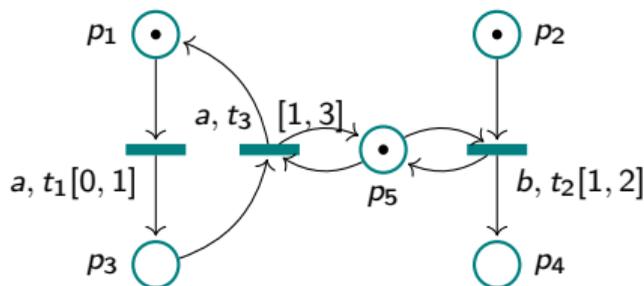
$$\sigma' = 0.8 \quad t_1 \ 0 \quad t_2 \ 2 \quad t_3 \ 3$$

Параметрический пробег

Пробег

$$\sigma = 0.8 \quad t_1 \ 0 \quad t_2 \ 2 \quad t_3 \ 3$$

\mathcal{TN} :



Параметрический пробег

$$\rho = x_0 \quad t_1 \quad x_1 \quad t_2 \quad x_2 \quad t_3 \quad x_3$$

$$B_\rho = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_0 \leq 1, \\ 1 \leq x_0 + x_1 \leq 2, \\ 1 \leq x_2 \leq 3, \\ 0 \leq x_3 < \infty. \end{array} \right\}$$

Отображение $h : \{x_0, \dots, x_3\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — **решение**, если оно отображает B_ρ в множество верных числовых неравенств.

Утверждение 3

Решение отображает параметрический пробег в пробег.

Дискретизация пространства состояний НВСП_{сл}

Теорема 1

Для любого параметрического пробега $\rho = x_0 t_1 x_1 \dots t_k x_k$ ($k \geq 0$) НВСП_{сл} с целочисленными границами временных интервалов существует целочисленное решение $\beta_\rho : \{x_0, \dots, x_k\} \rightarrow \mathbb{N}$.

Следствие

Для любого пробега НВСП_{сл} существует пробег с целыми временными значениями и той же безвременной частью.

Семантические модели НВСП_{сл}

Семантики моделей параллельных систем и процессов

‘Линейное — ветвящееся время’.

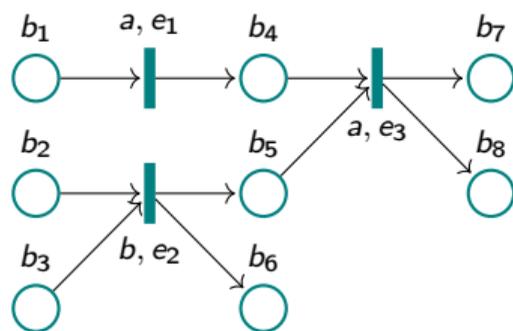
Степень, с которой учитываются точки недетерминированного выбора альтернативных действий моделируемой системы.

‘Интерливинг — частичный порядок’.

Степень, с которой учитывается частичный порядок между действиями моделируемой системы.



Причинно-следственная сеть



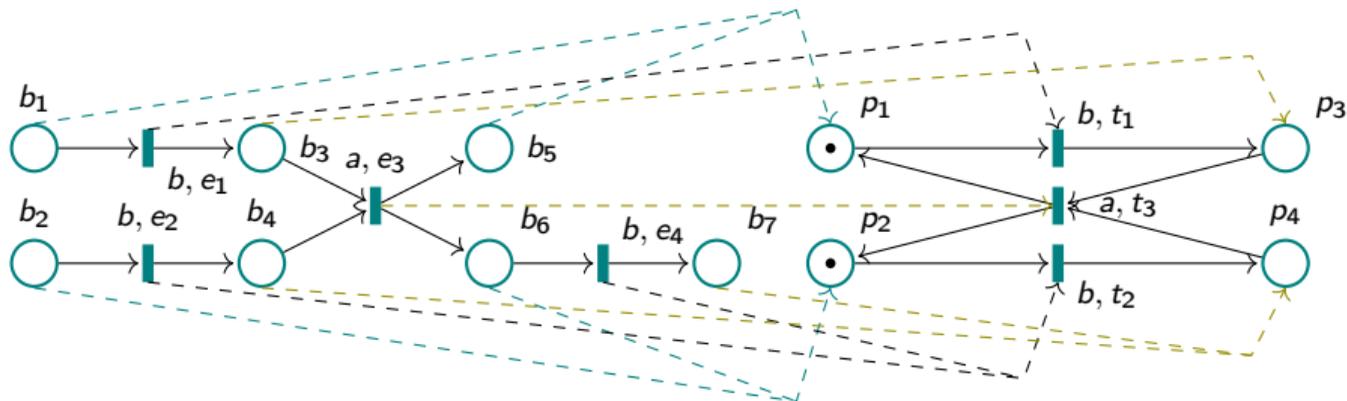
Причинно-следственная сеть (ПСС) — конечная ациклическая сеть $N = (B, E, G, I)$, где

- B — множество условий;
- E — множество событий;
- $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ — отношение инцидентности;
- $I : E \rightarrow Act$ — помечающая функция;
- $\forall b \in B : |b^\bullet| \leq 1 \wedge |\bullet b| \leq 1$ и $E = \bullet B = B^\bullet$.

Гомоморфизм

Гомоморфизмом из \mathcal{N} в \mathcal{M} относительно разметки M называется отображение $\varphi : (B \cup E) \rightarrow (P \cup T)$ такое, что

- $\varphi(B) \subseteq P$, $\varphi(E) \subseteq T$ и $I(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$;
- $\varphi|_{\bullet e}$ — биекция между $\bullet e$ и $\bullet \varphi(e)$ для всех $e \in E$;
- $\varphi|_{e\bullet}$ — биекция между $e\bullet$ и $\varphi(e)\bullet$ для всех $e \in E$;
- $\varphi|_{\bullet N}$ — биекция между $\bullet N$ и M , где $\bullet N = \{b \in B \mid \bullet b = \emptyset\}$.

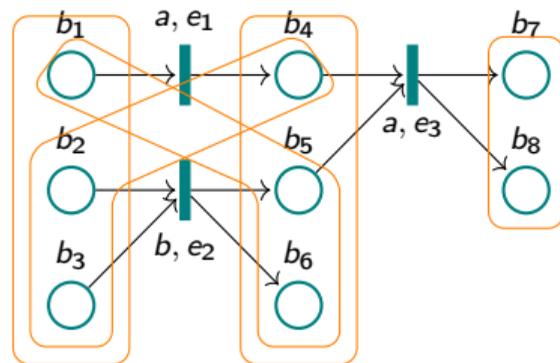


Сечение

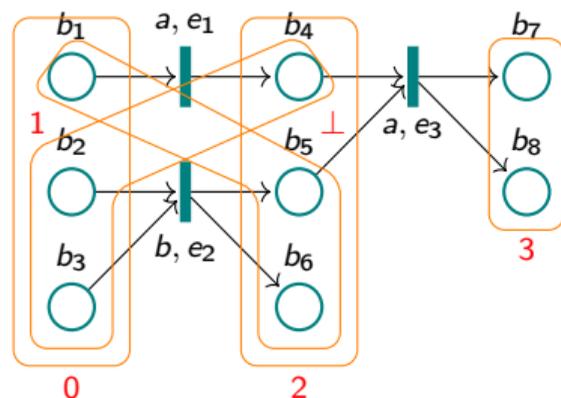
Транзитивное замыкание отношения G определяет **отношение причины** (\preceq) на событиях и условиях сети. Отсутствие отношения причины между элементами сети говорит об их **параллелизме**.

Сечение — максимальное по включению подмножество параллельных условий. Пусть $CUT(N)$ — множество всех сечений N . Для $C, C' \in CUT(N)$ введем обозначения:

- $\downarrow C = \{e \in E \mid e \preceq e' \in \bullet C\}$
(**предшествующие сечению события**);
- $\bullet N = \{b \in B \mid \bullet b = \emptyset\} \in CUT(N)$
(**начальное сечение**);
- $N^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\} \in CUT(N)$
(**конечное сечение**);
- $C \sim C' \iff \downarrow C \not\subseteq \downarrow C' \wedge \downarrow C' \not\subseteq \downarrow C$
(**параллелизм на сечениях**).



Временная причинно-следственная сеть



Временная ПСС (ВПСС) — пара $TN = (N, \tau)$, где N — ПСС и $\tau : CUT(N) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ — временная функция такая, что для каждого сечения C верно:
 $\tau(C) = \perp \iff \exists C' \sim C : \tau(C') > 0$.

Пусть $\mathcal{RC}(TN) = \{C \in CUT(N) \mid \tau(C) \in \mathbb{N}\}$ — **множество временных сечений**.

- Событие $e \in E$ **может произойти в C** , если $\bullet e \subseteq C$ и $((C \setminus \bullet e) \cup e^\bullet) \in \mathcal{RC}(TN)$;
- $Fi(C)$ — **множество всех событий, которые могут произойти в C** ;
- $C \xrightarrow{e} C'$, если $e \in Fi(C)$ и $C' = (C \setminus \bullet e) \cup e^\bullet \in \mathcal{RC}(TN)$.

Временной график

Пусть TN — ВПСС и

$C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$.

Последовательность событий

$\omega = e_1 \dots e_n$ называется

временным графиком из C в C' ,

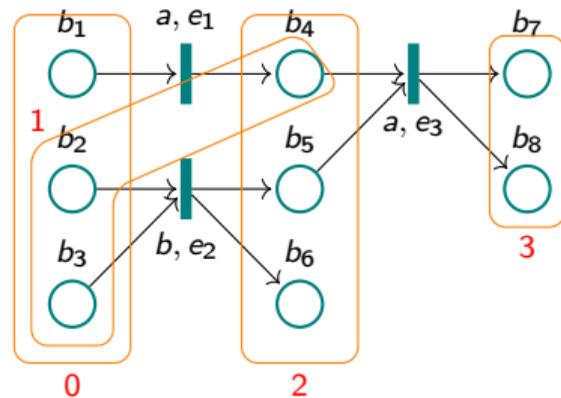
если существует цепочка сечений из

$\mathcal{RC}(TN)$ вида:

$$C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n,$$

$C_0 = C$ и $C_n = C'$.

Временным графиком будем называть временной график из начального сечения в конечное.



$\omega = e_1 e_2 e_3$.

$$\{b_1, b_2, b_3\} \xrightarrow{e_1} \{b_4, b_2, b_3\} \xrightarrow{e_2} \{b_4, b_5, b_6\} \xrightarrow{e_3} \{b_7, b_8\}.$$

Временное частично упорядоченное множество

Временное частично-упорядоченное множество (ВЧУМ) — это набор

$\eta = (X, \preceq, \tau, l)$, где

- X — множество элементов;
- \preceq — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение на X ;
- $\tau : X \rightarrow \mathbb{N}$ — временная функция;
- $l : X \rightarrow Act$ — помечающая функция.

Для ВПСС TN определим **ВЧУМ событий** $\eta(TN)$.

Функция Clock

Пусть $S = (M, I)$ — состояние НВСП_{сл}, φ — гомоморфизм относительно M . Для временного графика $\omega = e_1 \dots e_n$ из начального сечения в сечение $C \in \mathcal{RC}(TN)$ ($C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$, где $C_n = C$) и t допустимого в $\varphi(C)$ определим:

Промежуточная стратегия:

$$\text{Clock}_I(\omega, t) = \begin{cases} \sum_{\max(k) < i \leq n} \tau(C_i), \\ \text{если } \exists k < n: t \notin \text{En}(\varphi(C_k \cap C)), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i) + I(t), \\ \text{иначе;} \end{cases}$$

Атомарная стратегия:

$$\text{Clock}_A(\omega, t) = \begin{cases} \sum_{\max(k) < i \leq n} \tau(C_i), \\ \text{если } \exists k < n: t \notin \text{En}(\varphi(C_k)), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i) + I(t), \\ \text{иначе;} \end{cases}$$

Утверждение 4

Для любого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ существует временной график из начального сечения в сечение C . Кроме того, значение функции Clock не зависит от выбора временного графика.

Временной процесс

Пусть

- $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ — НВСП_{сл};
- $S = (M, I)$ — достижимое состояние \mathcal{TN} ;
- $TN = (N, \tau)$ — ВПСС;
- φ — гомоморфизм из N в \mathcal{N} относительно M .

Пара $\pi = (TN, \varphi)$ называется **временным процессом \mathcal{TN} относительно S** , если для каждого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и события $e \in Fi(C)$ выполняется:

$$\text{Clock}(C, \varphi(e)) \in D(\varphi(e)).$$

Связь временных процессов и пробегов НВСП_{сл}

Пусть $\omega = e_1 \dots e_n$ временной график временного процесса $\pi = (TN, \varphi)$ с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$.
 Определим функцию $Run(\pi, \omega) = \tau(C_0) \varphi(e_1) \tau(C_1) \dots \varphi(e_n) \tau(C_n)$.

Теорема 2

Если π временной процесс НВСП_{сл} \mathcal{TN} с временным графиком ω , то $Run(\pi, \omega)$ – пробег \mathcal{TN} .

Теорема 3

Если σ пробег НВСП_{сл} \mathcal{TN} то, существуют временной процесс π^* с временным графиком ω^* такие, что $\sigma = Run(\pi^*, \omega^*)$.

Теорема 4

π^* из Теоремы 3 единственный с точностью до изоморфизма.

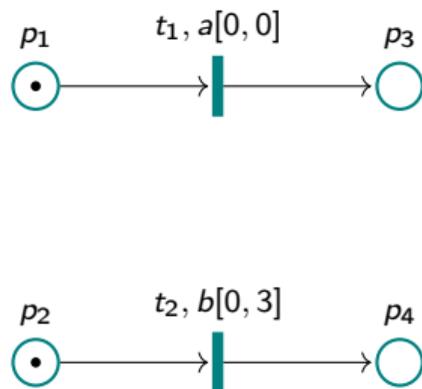
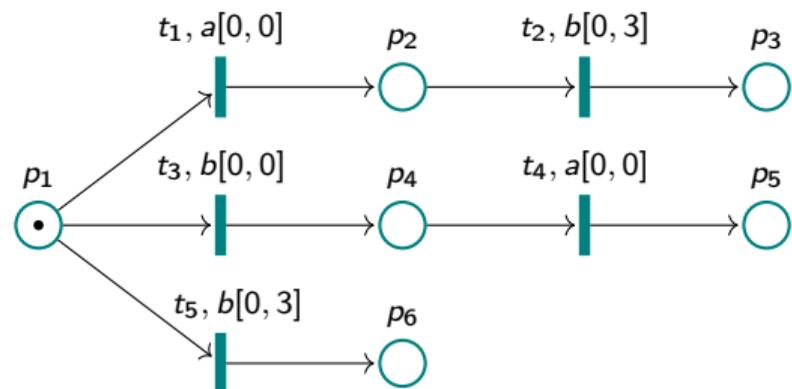
Эквивалентности НВСП_{сл}, основанные на состояниях

Языковая эквивалентность, основанная на состояниях

Пусть \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' НВСП_{сл} помеченные над Act .

$Lang(\mathcal{TN})$ — множество последовательностей вида: $\theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$, где $S_0 \xrightarrow{\theta_0} \tilde{S}_0 \xrightarrow{a_1} S_1 \xrightarrow{\theta_1} \dots \xrightarrow{a_n} S_n \xrightarrow{\theta_n} \tilde{S}_n$ — последовательность смены состояний из начального в результате хода времени θ_i и действий a_j при срабатывании переходов для $0 < j \leq n$ и $0 \leq i \leq n$.

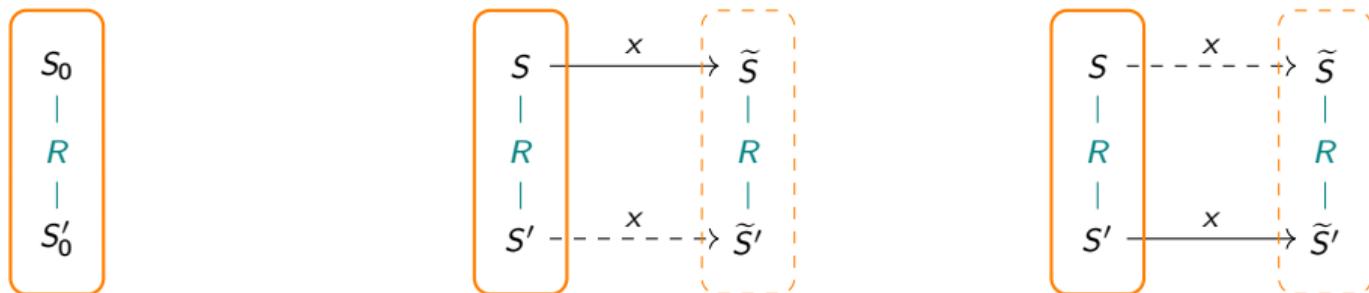
\mathcal{TN} и \mathcal{TN}' **языково эквивалентны** (обозначается $\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}'$), если $Lang(\mathcal{TN}) = Lang(\mathcal{TN}')$.

Пример $\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}'$ \mathcal{TN} : \mathcal{TN}' :

$$Lang(\mathcal{TN}) = Lang(\mathcal{TN}') = \{\theta, 0a\theta, \theta'b\theta, 0b0a\theta, 0a\theta'b\theta \mid \theta, \theta' \in \mathbb{N}, \theta' \leq 3\}$$

Бисимуляционная эквивалентность, основанная на состояниях

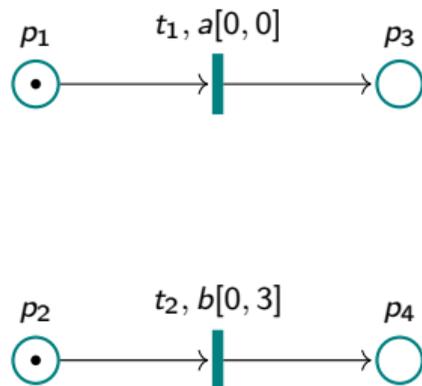
НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются **бисимуляционно эквивалентными** (обозначается $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}'$), если существует **бисимуляция** R такая, что



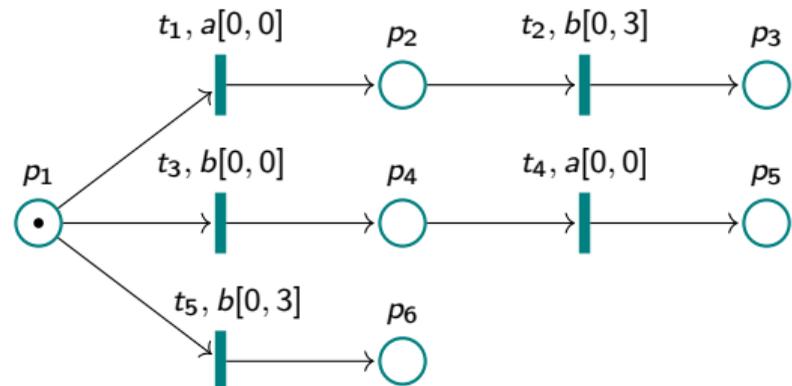
где $x \in Act \cup \mathbb{N}$

Пример $\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}'$, но $\mathcal{TN} \not\approx \mathcal{TN}'$

\mathcal{TN} :



\mathcal{TN}' :



Эквивалентности НВСП_{сл}, основанные на временных процессах

Расширения временных процессов НВСП_{сл}

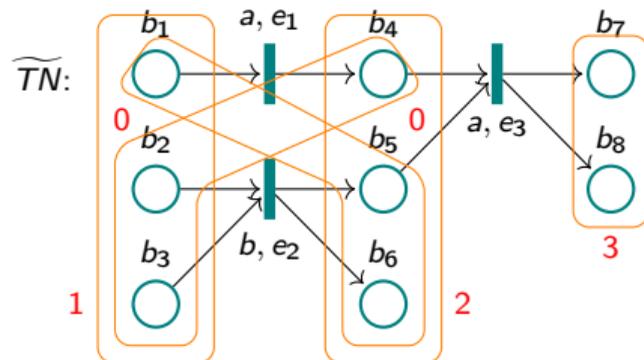
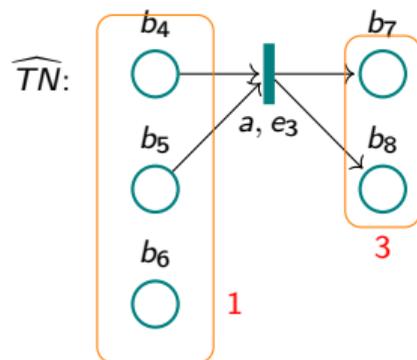
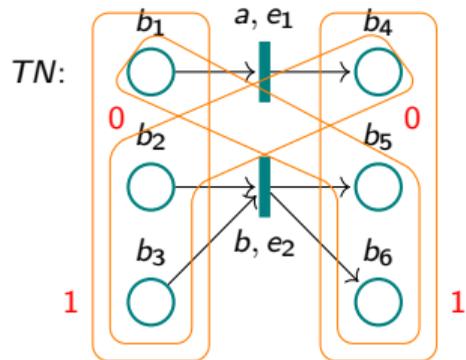
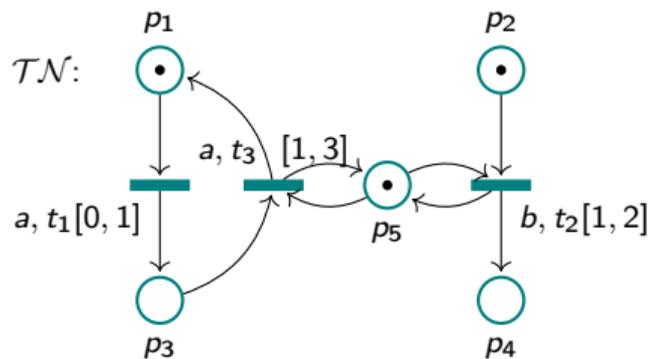
Временной процесс $\pi_0 = (((B_0, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \tau_0 \equiv 0), \varphi_0)$, где φ_0 — гомоморфизм относительно M_0 , называется **начальным**.

$\tilde{\pi}$ — **расширение** π на процесс $\hat{\pi}$ (обозначается $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$), если π является «префиксом», а $\hat{\pi}$ является «суффиксом» $\tilde{\pi}$.

Частные случаи расширений временных процессов:

- $\tilde{\pi}$ — **расширение π на время θ**
(обозначается $\pi \xrightarrow{\theta} \tilde{\pi}$), если $\hat{E} = \emptyset$ и $\hat{\tau}(\hat{B}) = \theta$;
- $\tilde{\pi}$ — **расширение π на действие a**
(обозначается $\pi \xrightarrow{a} \tilde{\pi}$), если $\hat{E} = \{e\}$, $l(e) = a$ и $\hat{\tau} \equiv 0$.

Пример $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$



Языковые эквивалентности, основанные на временных процессах

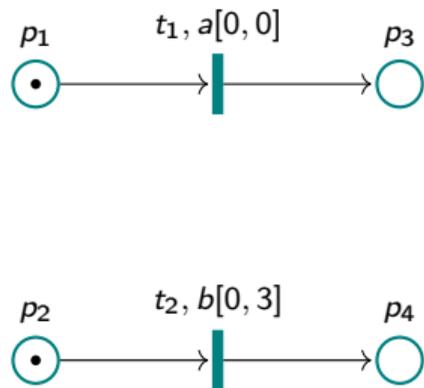
Пусть \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' НВСП_{сл} помеченные над Act и $\star \in \{int, por, prc\}$.

- $Trace_{int}(\mathcal{TN})$ — множество последовательностей вида: $\theta_0 a_1 \theta_1 \dots a_n \theta_n$, где $\pi_0 \xrightarrow{\theta_0} \tilde{\pi}_0 \xrightarrow{a_1} \pi_1 \dots \tilde{\pi}_{n-1} \xrightarrow{a_n} \pi_n \xrightarrow{\theta_n} \tilde{\pi}_n$ — последовательность временных процессов \mathcal{TN} из начального временного процесса в результате хода времени θ_j и действий a_j для $0 < j \leq n$ и $0 \leq i \leq n$.
- $Trace_{por}(\mathcal{TN})$ — множество классов изоморфизма ВЧУМ событий ВПСС из множества временных процессов \mathcal{TN} .
- $Trace_{prc}(\mathcal{TN})$ — множество классов изоморфизма ВПСС из множества временных процессов \mathcal{TN} .

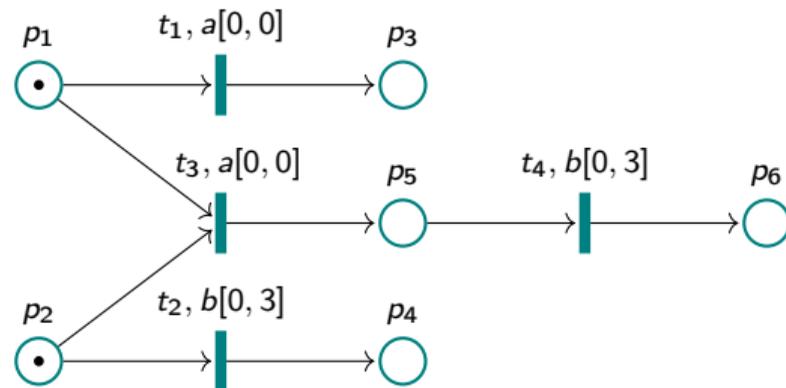
\mathcal{TN} и \mathcal{TN}' \star -языково эквивалентны (обозначается $\mathcal{TN} \equiv_{\star} \mathcal{TN}'$), если $Trace_{\star}(\mathcal{TN}) = Trace_{\star}(\mathcal{TN}')$.

Пример $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}'$, но $\mathcal{TN} \not\equiv_{por} \mathcal{TN}'$

\mathcal{TN} :

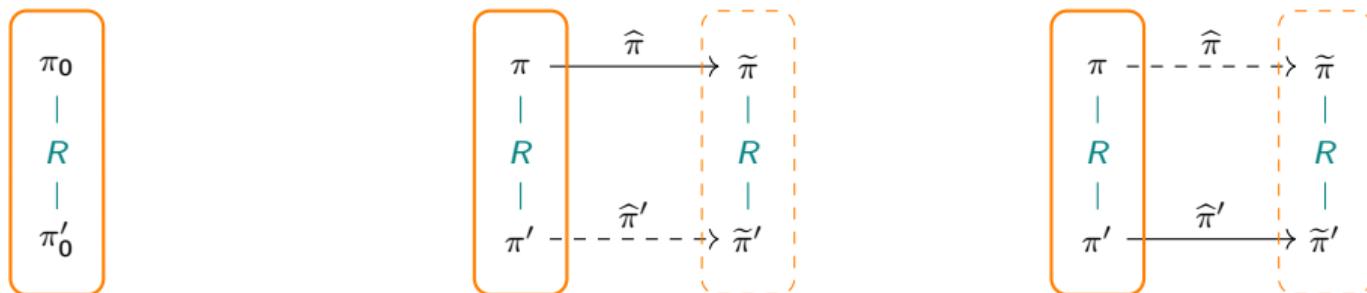


\mathcal{TN}'



Бисимуляционные эквивалентности, основанные на процессах

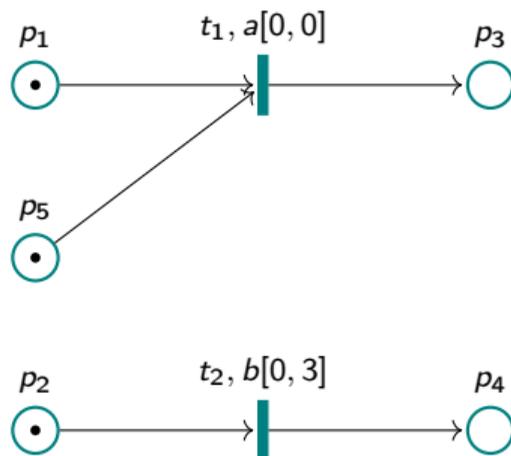
Пусть $\star \in \{int, por, prc\}$. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -**бисимуляционно эквивалентными** (обозначается $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_{\star} \mathcal{TN}'$), если существует **бисимуляция** R такая, что



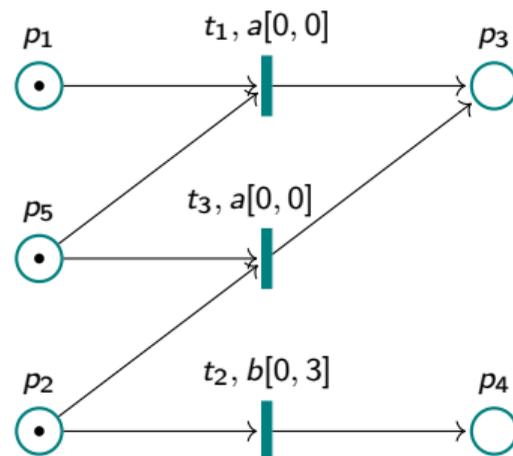
- $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}'$ соответствуют одному и тому же ходу времени или одиночному действию, в случае $\star = int$;
- $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, в случае $\star = por$;
- $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, в случае $\star = prc$.

Пример $\mathcal{TN} \equiv_{prc} \mathcal{TN}'$, но $\mathcal{TN} \not\equiv_{int} \mathcal{TN}'$

\mathcal{TN}



\mathcal{TN}'



Связь эквивалентностей, основанных на состояниях и процессах

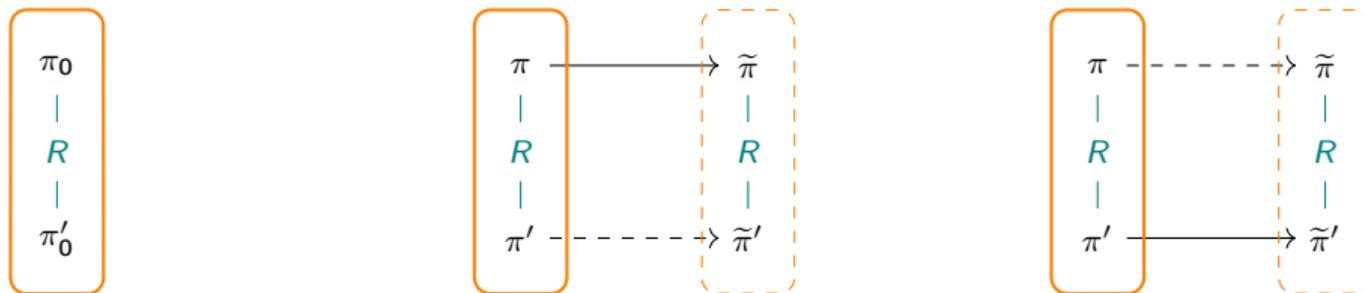
Теорема 5

Пусть \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' — НВСП_{сл}, помеченные над Act .

- $\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_{int} \mathcal{TN}'$;
- $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \dot{\equiv}_{int} \mathcal{TN}'$.

Слабосохраняющие историю эквивалентности

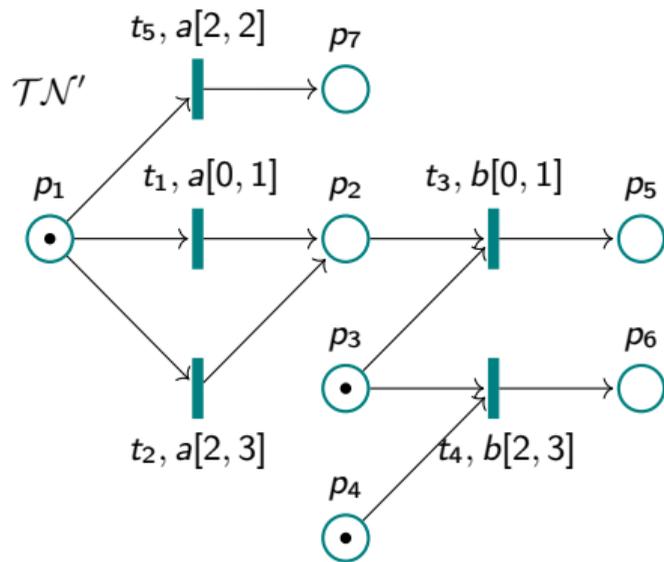
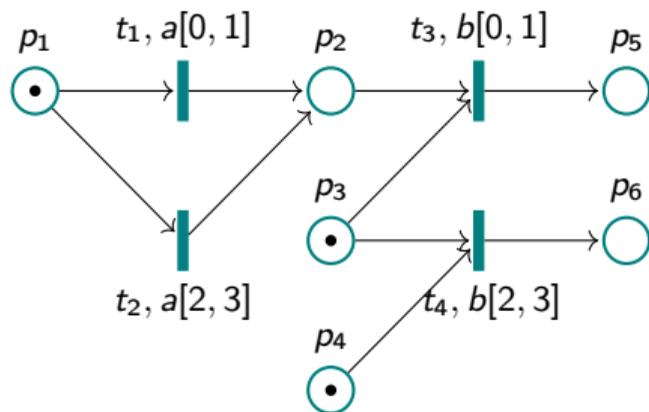
Пусть $\star \in \{por, prc\}$. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -бисимуляционно эквивалентными со слабым сохранением истории (обозначается $\mathcal{TN} \stackrel{wh}{\simeq}_{\star} \mathcal{TN}'$), если существует бисимуляция R такая, что



- $\eta(\mathcal{TN}) \simeq \eta(\mathcal{TN}')$, в случае $\star = por$;
- $\mathcal{TN} \simeq \mathcal{TN}'$, в случае $\star = prc$.

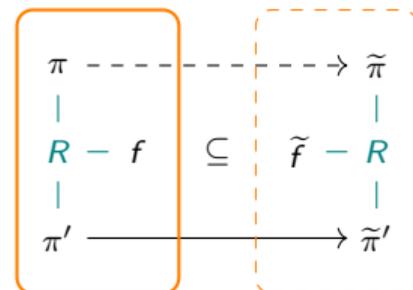
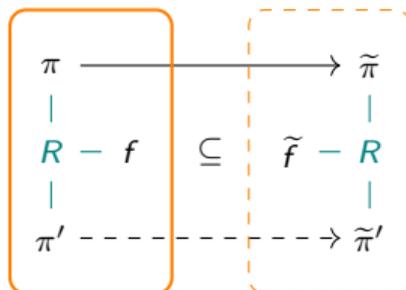
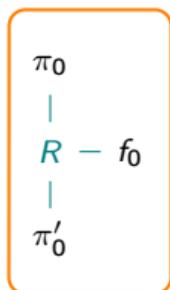
Пример $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_{prc} \mathcal{TN}'$, но $\mathcal{TN} \not\Leftrightarrow_{\substack{wh \\ por}} \mathcal{TN}'$

\mathcal{TN}



Сохраняющие историю эквивалентности

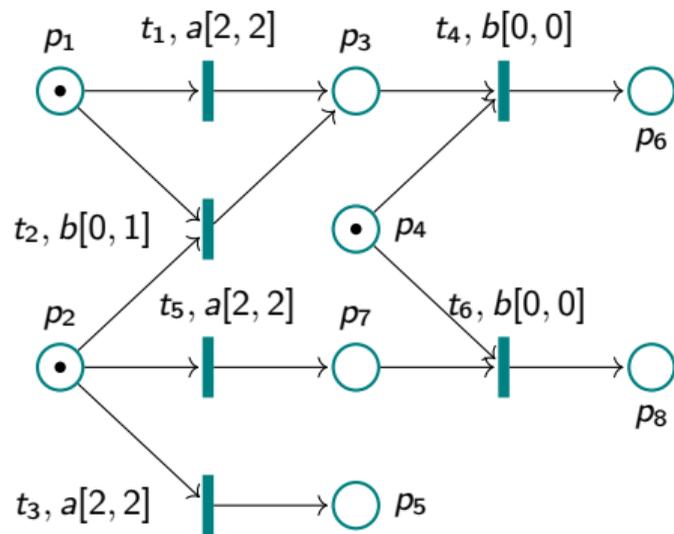
Пусть $\star \in \{por, prc\}$. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -бисимуляционно эквивалентными с сохранением истории (обозначается $\mathcal{TN} \stackrel{h}{\simeq}_{\star} \mathcal{TN}'$), если существует бисимуляция R такая, что



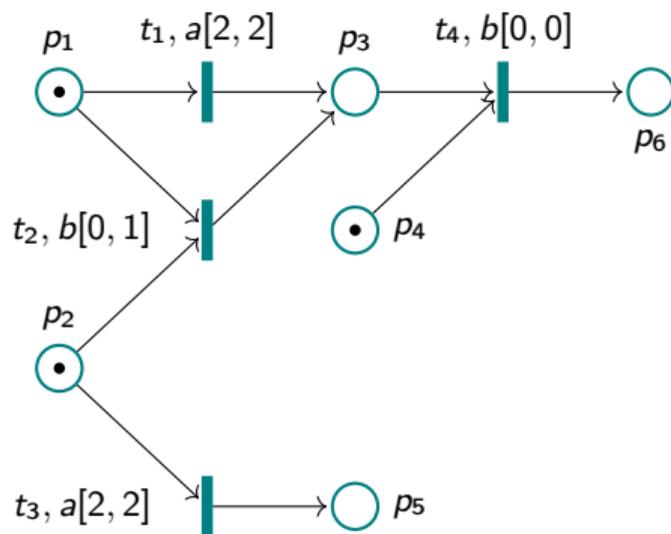
- $f : \eta(\mathcal{TN}) \simeq \eta(\mathcal{TN}')$, в случае $\star = por$;
- $f : \mathcal{TN} \simeq \mathcal{TN}'$, в случае $\star = prc$.

Пример $\mathcal{TN} \stackrel{wh}{\underset{prc}{\Leftrightarrow}} \mathcal{TN}'$, но $\mathcal{TN} \not\stackrel{h}{\underset{por}{\Leftrightarrow}} \mathcal{TN}'$

\mathcal{TN}



\mathcal{TN}'



Хронологии

Хронология — пара (π, ω) из временного процесса и временного графика его ВПСС.

Хронология (π_0, ε) называется **начальной**, если π_0 — начальный процесс, а ε — пустая последовательность.

$(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — **расширение** (π, ω) на хронологию $(\hat{\pi}, \hat{\omega})$

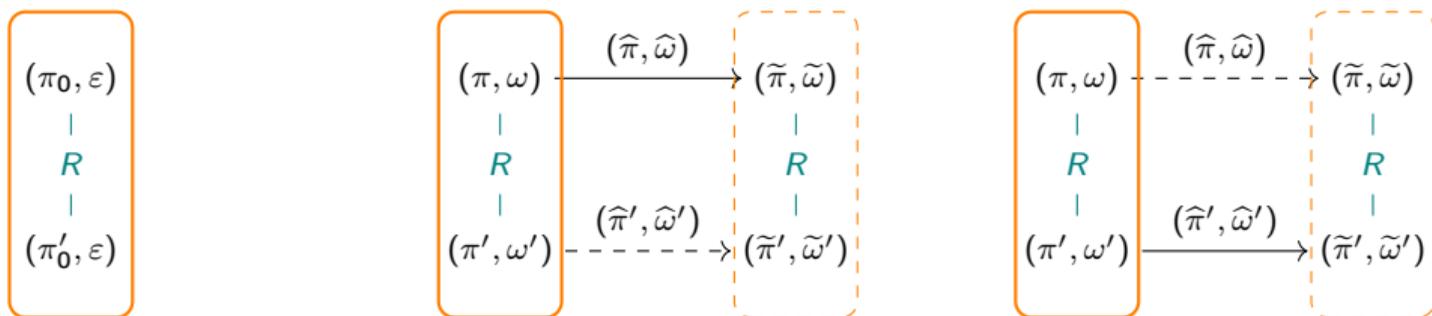
(обозначается $(\pi, \omega) \xrightarrow{(\hat{\pi}, \hat{\omega})} (\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$), если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ и $\tilde{\omega} = \omega \hat{\omega}$.

Частные случаи расширений хронологий:

- $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — **расширение** (π, ω) на время θ , если $\tilde{\pi}$ — расширение π на время θ .
- $(\tilde{\pi}, \tilde{\omega})$ — **расширение** (π, ω) на действие a , если $\tilde{\pi}$ — расширение π на действие a .

Прямые эквивалентности, основанные на хронологиях

Пусть $\star \in \{int, por, prc\}$. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -**прямо бисимуляционно эквивалентными** ($\mathcal{TN} \approx_{\star} \mathcal{TN}'$), если существует **бисимуляция** R такая, что



- $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}'$ соответствуют одному и тому же ходу времени или одиночному действию, в случае $\star = int$;
- $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, в случае $\star = por$;
- $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, в случае $\star = prc$.

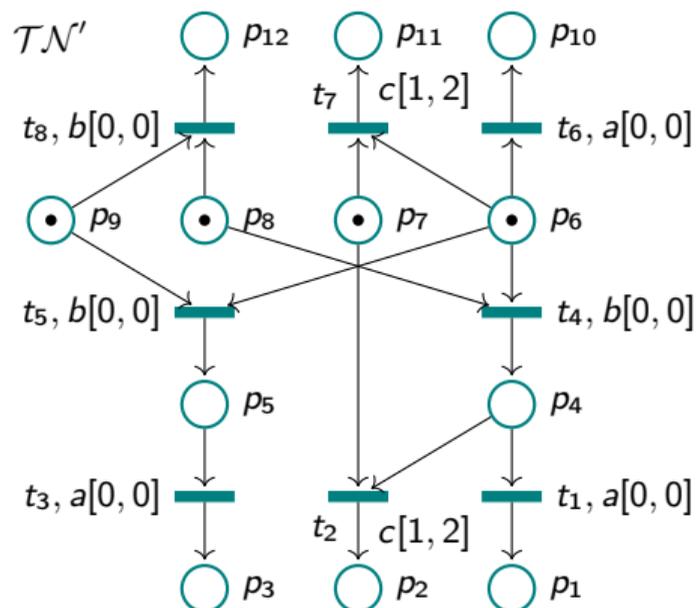
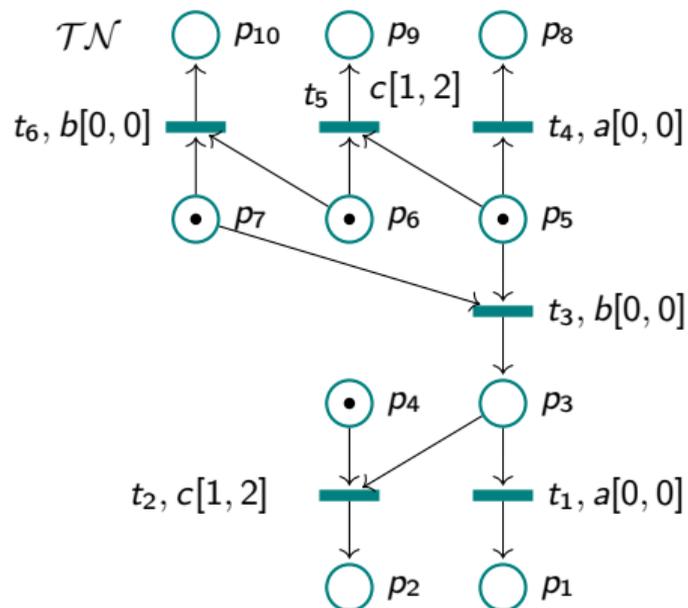
Обратные-прямые эквивалентности

Пусть \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' — НВСП_{сл}, помеченные над Act , $\star, * \in \{int, por, prc\}$. \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' являются ***-обратно *-прямо бисимуляционно эквивалентными** (обозначается $\mathcal{TN} \approx_{* \star} \mathcal{TN}'$), если данные сети \star -прямо бисимуляционно эквивалентны с бисимуляцией R такой, что



- $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}'$ соответствуют одному и тому же ходу времени или одиночному действию, в случае $\star = int$;
- $\eta(\widehat{TN}) \simeq \eta(\widehat{TN}')$, в случае $\star = por$;
- $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, в случае $\star = prc$.

Пример $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_{prc} \mathcal{TN}'$, но $\mathcal{TN} \not\approx_{int\ prc} \mathcal{TN}'$



Иерархия эквивалентностей

Теорема 6

Пусть \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' — НВСП_{сл}, помеченные над \mathcal{Act} . Для эквивалентностей R и \tilde{R} верно, что

$$(\mathcal{TN})R(\mathcal{TN}') \Rightarrow (\mathcal{TN})\tilde{R}(\mathcal{TN}')$$

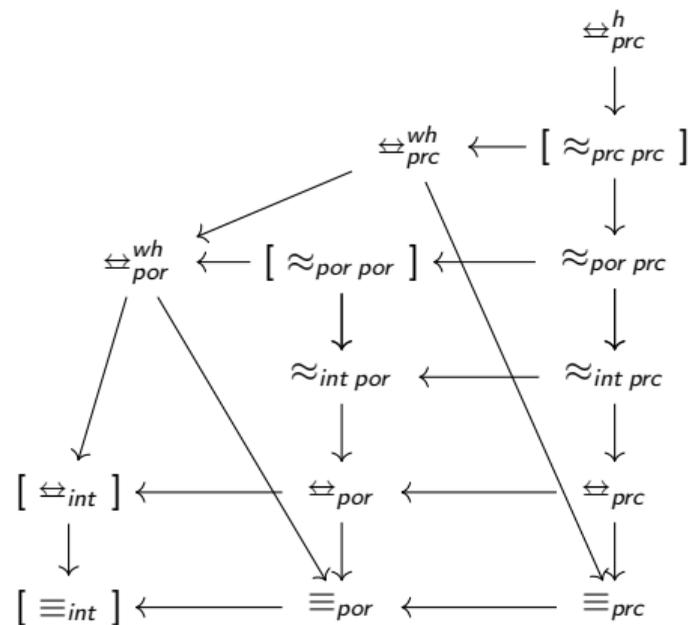
тогда и только тогда, когда в графе существует путь от R к \tilde{R} , где

$$[\equiv_{int}] = \{ \cong, \equiv_{int} \},$$

$$[\Leftrightarrow_{int}] = \{ \sim, \Leftrightarrow_{int}, \approx_{int int} \},$$

$$[\approx_{por por}] = \{ \Leftrightarrow_{por}^h, \approx_{por por}, \approx_{por int} \},$$

$[\approx_{prc prc}] = \{ \approx_{prc int}, \approx_{prc por}, \approx_{prc prc} \}$ — множества совпадающих эквивалентностей.



Основные результаты

Для НВСП_{сл} с промежуточной и атомарной стратегиями сброса часов были получены следующие результаты:

- (1) Предложен метод редукции пространства состояний НВСП_{сл}. Доказано, что данным способом любой пробег может быть преобразован к пробегу с целочисленными временными значениями с сохранением безвременной части.
- (2) Определены временные процессы как 'истинно параллельная' семантика НВСП_{сл}. Доказана корректность данной модели относительно интерливинговой семантики НВСП_{сл}.
- (3) Разработаны эквивалентности в дихотомиях 'линейное — ветвящееся время' и 'интерливинг — частичный порядок'. Изучены взаимосвязи между ними.

Публикации

- Virbitskaite I. B., Zubarev A. Yu. "Истинно параллельная" семантика непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной и устойчиво атомарной пространственной стратегиями // Программирование. – 2021. – № 5. – С. 60-74.
- Virbitskaite I. B., Zubarev A. Yu. Time Causal Processes in Time Petri Nets with Weak Semantics // Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS. – 2020. – Vol. 32, No 4. – P. 261-284.
- Zubarev A. Yu. Сравнение языковых и бисимуляционных эквивалентностей непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией // Проблемы информатики. 2022. № 4. С. 5-27.
- Zubarev A. Yu. Иерархия эквивалентностей непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией // Проблемы информатики. 2024. № 1. (в печати)
- Zubarev A. Yu. State space reduction for time Petri nets with weak semantics // Bull. Nov. Comp. Center. – 2019. – Vol. 39. – P. 39-52.
- Virbitskaite I. B., Zubarev A. Yu. Сравнение языков моделей сетей Петри со слабой временной стратегией // Тезисы Всероссийской научной конференции "Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем", 3-8 декабря 2021, Тверь. – 2021. – С. 125-131.
- Zubarev A. Yu. Временные интерливинговые процессы временных сетей Петри со слабой временной и устойчиво атомарной пространственной стратегиями / А. Ю. Зубарев // Тезисы XXVI Байкальской Всероссийской конференции с международным участием "Информационные и математические технологии в науке и управлении", 29 июня - 8 июля 2021, Иркутск. – 2021. – С. 32.
- Zubarev A. Yu. Интерливинговые семантики непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией // Тезисы докладов международной конференции "Мальцевские чтения", 20-24 сентября 2021, Новосибирск. – 2021. – С. 42.

Спасибо за внимание!

Конструкция целочисленного решения

Пусть $\theta_0 U_1 \theta_1 \dots U_k \theta_k$ — пробег, $\rho = x_0 U_1 x_1 \dots U_k x_k$ — параметрический пробег, B_ρ — множество ограничений. Построим $\beta_i : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ индукцией по $0 \leq i \leq k$.

$i = 0$. Тогда, для всех $0 \leq j \leq k$, $\beta_0(x_j) := \begin{cases} \lfloor \tau_j \rfloor & \text{если } j = k, \\ \tau_j & \text{иначе.} \end{cases}$

$i > 0$.

$\underline{\beta}_i(x_j) := \begin{cases} \lfloor \beta_{i-1}(x_j) \rfloor & \text{если } j = k - i, \\ \beta_{i-1}(x_j) & \text{иначе;} \end{cases}$ $\overline{\beta}_i(x_j) := \begin{cases} \lceil \beta_{i-1}(x_j) \rceil & \text{если } j = k - i, \\ \beta_{i-1}(x_j) & \text{иначе.} \end{cases}$

Если существует ограничение из B_ρ вида $a \leq g \leq b$ такое, что $\lceil \lceil g \rceil \underline{\beta}_i \rceil < \lfloor \lfloor g \rfloor \overline{\beta}_0 \rfloor$, то $\beta_i = \overline{\beta}_i$, иначе $\beta_i = \underline{\beta}_i$.

Тогда $\beta_\rho = \beta_k$.

Временное частично упорядоченное множество

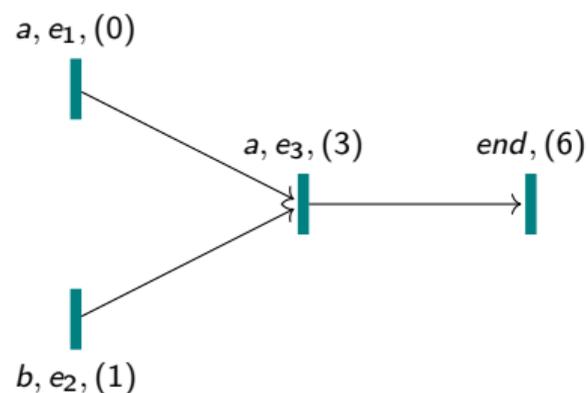
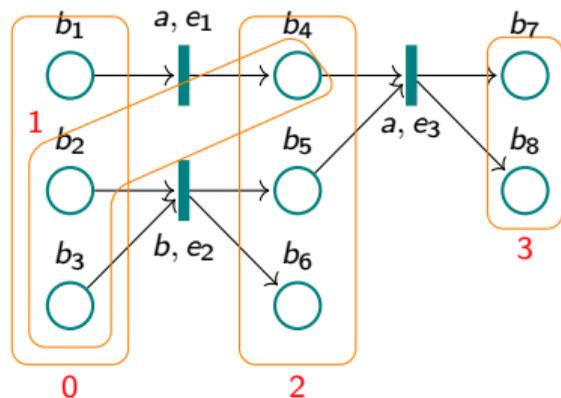
Временное частично-упорядоченное множество (ВЧУМ) — это набор $\eta = (X, \preceq, \tau, l)$, где X — множество элементов; \preceq — рефлексивное, транзитивное, антисимметричное отношение на X ; $\tau : X \rightarrow \mathbb{N}$ — временная функция; $l : X \rightarrow Act$ — помечающая функция.

Для ВПСС $TN = ((N = (B, E, G, l)), \tau)$, временного графика $\omega = e_1 \dots e_n$ с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$ определим **ВЧУМ событий** $\eta(TN, \omega) = (E^*, \preceq^*, Age, l^*)$ следующим образом:

- $E^* = E \cup end$;
- $\preceq^* = (\preceq \cap (E \times E)) \cup \{(e, end), (end, end) \mid e \in E\}$;
- $Age(e) = \begin{cases} \sum_{0 \leq i < k} \tau(C_i), & \text{если } e \in V_k (0 \leq k \leq n), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i), & \text{иначе;} \end{cases}$
- $l^*(e) = \begin{cases} l(e), & \text{если } e \in E, \\ \varepsilon, & \text{иначе.} \end{cases}$

ВЧУМ событий ВПСС не зависят от выбора временного графика.

Пример ВЧУМ событий ВПСС



$$\omega = e_1 e_2 e_3 \quad \{b_1, b_2, b_3\} \xrightarrow{e_1} \{b_4, b_2, b_3\} \xrightarrow{e_2} \{b_4, b_5, b_6\} \xrightarrow{e_3} \{b_7, b_8\}$$

- $\text{Age}(e_1) = \tau(\{b_1, b_2, b_3\}) = 0$;
- $\text{Age}(e_2) = \tau(\{b_1, b_2, b_3\}) + \tau(\{b_4, b_2, b_3\}) = 1$;
- $\text{Age}(e_3) = \tau(\{b_1, b_2, b_3\}) + \tau(\{b_4, b_2, b_3\}) + \tau(\{b_4, b_5, b_6\}) = 3$;
- $\text{Age}(end) = \tau(\{b_1, b_2, b_3\}) + \tau(\{b_4, b_2, b_3\}) + \tau(\{b_4, b_5, b_6\}) + \tau(\{b_7, b_8\}) = 6$.

Взаимосвязи пробегов и временных процессов НВСП_{сл}

Утверждение

Пусть $\star \in \{I, A\}$, $\pi = (TN = (N, \tau), \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S = (M, I))$;
 $C \in \mathcal{RC}(TN)$; $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN, \bullet N, C)$ с последовательностью
сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = C)$ ($n \geq 0$). Если

$Run(\pi, \omega) \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$, т.е. $(M^0 = M, I^0 = I) \xrightarrow{\tau(C_0)} (M^0, \tilde{I}^0) \xrightarrow{\varphi(e_1)}$
 $(M^1, I^1) \xrightarrow{\varphi(C_1)} (M^1, \tilde{I}^1) \dots (M_{n-1}, \tilde{I}^{n-1}) \xrightarrow{\varphi(e_n)} (M^n, I^n) \xrightarrow{\tau(C_n)} (M^n, \tilde{I}^n)$, то для
каждого $0 \leq i \leq n$ верно:

- (а) сужение функции φ на C_i — биекция между C_i и M^i ;
- (б) $Clock_\star(C_i, t) = \tilde{I}^i(t)$ для всех $t \in En(M^i)$

Конструкция π^*

Сначала построим конструкцию $N^* = (B^*, E^*, G^*, l^*)$ следующим образом:

- $B^* = \{b_{0,p}^* \mid p \in M\} \cup \{b_{i,p}^* \mid p \in t_i^\bullet, 1 \leq i \leq n\}$;
- $E^* = \{e_i^* \mid 1 \leq i \leq n\}$;
- $G^* = \{(e_i^*, b_{i,p}^*) \in E^* \times B^* \mid p \in t_i^\bullet, 1 \leq i \leq n\} \cup \{(b_{j,p}^*, e_i^*) \in B^* \times E^* \mid p \in \bullet t_i, j = \max\{k < i \mid b_{k,p}^* \in B^*\}, 1 \leq i \leq n\}$;
- $l^* : E \rightarrow Act$ такая, что $l^*(e_i^*) = L(t_i)$ для $1 \leq i \leq n$.

Определим функцию φ^* так: $\varphi^*(b_{i,p}^*) = p$ для всех $b_{i,p}^* \in B^*$ и $\varphi^*(e_i^*) = t_i$ для всех $e_i^* \in E^*$.

Построим сечения $C_0^* = \bullet N^*$ и $C_i^* = (C_{i-1}^* \setminus \bullet e_i^*) \cup e_i^{\bullet}$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Определим функцию $\tau^* : CUT(N^*) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ так:

$$\tau^*(C) = \begin{cases} \theta_i, & \text{если } C = C_i^* \text{ для некоторого } 0 \leq i \leq n, \\ \perp, & \text{если } C \in Cut(C_i^*) \wedge \theta_i > 0 \text{ для некоторого } 0 \leq i \leq n, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

Состояния и временные процессы $\text{НВСП}_{\text{сл}}$

Пусть π — временной процесс $\text{НВСП}_{\text{сл}}$ \mathcal{TN} и σ пробег, полученный отображением временного графика π . Обозначим через S_π состояние такое, что $S_0 \xrightarrow{\sigma} S_\pi$.

Утверждение

Пусть \mathcal{TN} — $\text{НВСП}_{\text{сл}}$, $\pi = (TN, \varphi) \in \text{PRC}(\mathcal{TN})$ и $x \in \mathbb{N} \cup \text{Act}$.

- (1) Если $\pi \xrightarrow{x} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \text{PRC}(\mathcal{TN})$, то $S_\pi \xrightarrow{x} S_{\tilde{\pi}}$.
- (2) Если $S_\pi \xrightarrow{x} \tilde{S}$, то существует $\tilde{\pi} \in \text{PRC}(\mathcal{TN})$ такой, что $\pi \xrightarrow{x} \tilde{\pi}$ и $\tilde{S} = S_{\tilde{\pi}}$.

Теорема

- $\mathcal{TN} \cong \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_{\text{int}} \mathcal{TN}'$;
- $\mathcal{TN} \sim \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \Leftrightarrow_{\text{int}} \mathcal{TN}'$.

Взаимосвязи эквивалентностей

Утверждение

Для НВСП_{сл} \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' , помеченных над Act , $\star \in \{int, por, prc\}$ выполняется:

- (а) $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_{\star} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{\star} \mathcal{TN}'$;
- (б) $\mathcal{TN} \approx_{int} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{int\ int} \mathcal{TN}'$;
- (в) $\mathcal{TN} \approx_{\star\ int} \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \approx_{\star\star} \mathcal{TN}'$;

Утверждение

Для НВСП_{сл} \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' , помеченных над Act , и $\star \in \{por, prc\}$ выполняется:

- (а) $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_{\star}^h \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \approx_{\star\star} \mathcal{TN}'$;
- (б) $\mathcal{TN} \approx_{por\ por} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \Leftrightarrow_{por}^h \mathcal{TN}'$;
- (в) $\mathcal{TN} \approx_{prc\ prc} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \Leftrightarrow_{prc}^{wh} \mathcal{TN}'$.